付　録

A.1 テンソル

A.1.1 ベクトルの変換則

直角座標系 x_1, x_2, x_3 の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とし，それを回転させた新しい直角座標系を x'_1, x'_2, x'_3，その基本ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とすると，

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{e}'_l \cdot \boldsymbol{e}'_m = \delta_{lm} \tag{A.1}$$

の関係がある．ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．$\alpha_{il} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_l$ を新旧両座標軸の間の方向余弦とすると

$$\boldsymbol{e}_i = \alpha_{il}\boldsymbol{e}'_l, \quad \boldsymbol{e}'_l = \alpha_{il}\boldsymbol{e}_i \tag{A.2}$$

である．

(A.2) を (A.1) に代入すると

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \alpha_{il}\alpha_{jm}\boldsymbol{e}'_l \cdot \boldsymbol{e}'_m = \alpha_{il}\alpha_{jm}\delta_{lm} = \alpha_{il}\alpha_{jl}.$$

同様にして，$\boldsymbol{e}'_l \cdot \boldsymbol{e}'_m = \alpha_{il}\alpha_{im}$ を得るから，(A.1) を用いて

$$\alpha_{il}\alpha_{jl} = \delta_{ij}, \quad \alpha_{il}\alpha_{im} = \delta_{lm} \tag{A.3}$$

を得る．これは行列 (α_{il}) が直交行列であることを示している．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の旧座標系での成分を v_i，新座標系での成分を v'_l とすれば，

$$\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}_i = v'_l\boldsymbol{e}'_l \tag{A.4}$$

が成り立つから，(A.2) を (A.4) に代入すれば，

$$v_i = \alpha_{il}v'_l, \quad v'_l = \alpha_{il}v_i \tag{A.5}$$

の関係を得る．これが座標変換に際してのベクトルの成分の変換則を与える．逆に，この変換則を満たす３つの数の組としてベクトル（あるいは１階のテンソル）を定義することができる．また，座標変換によって，その値の変わらないものをスカラー（０階のテンソル）という．

この定義にしたがって，u_i, v_i をベクトルとすれば，$u_i + v_i$ もベクトルであり，ϕ がスカラーで，v_i がベクトルならば，ϕv_i はベクトルであるとか，$\nabla\phi$ はベクトルであるとか，$u_i v_i$ はスカラーであるとかいったことを証明することができる．

例えば，$u'_l = \alpha_{il} u_i$，$v'_l = \alpha_{il} v_i$ から直ちに

$$u'_l + v'_l = \alpha_{il} u_i + \alpha_{il} v_i = \alpha_{il}(u_i + v_i),$$
$$u'_l v'_l = \alpha_{il}\alpha_{jl} u_i v_j = \delta_{ij} u_i v_j = u_i v_i$$

を得るが，これらはそれぞれ $u_i + v_i$ がベクトルの成分であり，$u_i v_i$ がスカラーであることを示している．

また，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'_l} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_l}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \alpha_{il}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial v'_l}{\partial x'_l} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_l}\frac{\partial v'_l}{\partial x_i} = \alpha_{il}\alpha_{jl}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

から，$\nabla\phi$ がベクトルで，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ がスカラーであることがわかる．

A.1.2　２階のテンソル

ベクトル u_i とベクトル v_i の各成分の積をつくれば，９個の数

$$\begin{matrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{matrix}$$

を得る．これら９個の数の組をベクトル u_i と v_i の**テンソル積** (tensor product) といい，これを $u_i v_j (i, j = 1, 2, 3)$ または単に $u_i v_j$ で表す．$u_i v_j$ のおのおのをテンソル積の成分という．

座標変換によって，u_i と v_i は (A.5) の変換則に従うから

$$u_i v_j = \alpha_{il}\alpha_{jm} u'_l v'_m, \quad u'_l v'_m = \alpha_{il}\alpha_{jm} u_i v_j \tag{A.6}$$

を得る．これがベクトルのテンソル積の成分の変換式である．

一般に，9 個の数の組 T_{ij} が座標変換 (A.2) によって

$$T_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T'_{lm}, \quad T'_{lm} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{ij} \tag{A.7}$$

のように変換されるとき，これら 9 個の数の組を**（2 階の）テンソル** (tensor (of 2nd degree)) といい，T_{ij} のおのおのをテンソルの成分という．T_{ij} を成分とするテンソルを単にテンソル T_{ij} ということもある．ここで，(A.7) の一方から他方が導けるので，どちらか一方が満たされればよいことに注意しよう．

この定義から 2 つのベクトルのテンソル積はテンソルである．また，2 つのテンソルを T_{ij}, S_{ij} とすれば，

$$T_{ij} + S_{ij}, \quad T_{ij} - S_{ij}$$

もともにテンソルである．前者を和，後者を差という．ϕ をスカラーとするとき

$$\phi T_{ij}$$

もテンソルである．各成分が 0 であるテンソルを**零テンソル** (zero tensor) という．T_{ji} もテンソルであり，これを**転置テンソル** (transposed tensor) という．テンソル T_{ij} が $T_{ij} = T_{ji}$ を満たすならば，**対称テンソル** (symmetric tensor) といい，$T_{ij} = -T_{ji}$ を満たすならば**反対称テンソル** (anti-symmetric tensor) という．対称，反対称の性質は座標変換に無関係であることが示される．任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和に分解できる:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

(A.7) の第 2 式の T_{ij} に δ_{ij} を代入すると

$$T'_{lm} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\delta_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{im} = \delta_{lm}$$

である．したがって，クロネッカーのデルタはテンソルの成分である．つまり，δ_{ij} はどの直角座標系においても単位行列の形の成分を持つテンソルである．これを**単位テンソル** (unit tensor) と呼ぶ．

また，u_i をベクトルとすれば，

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x'_l} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_l}\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ik}u_i) = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

だから，$\partial u_i/\partial x_j$ はテンソルである．u_i が流体の速度ベクトルならば，これは速度勾配テンソルである．

演習 A.1

2階のテンソルの対称性及び反対称性は座標変換に無関係であることを示せ．

A.1.3 線形作用素としてのテンソル

v_i をベクトル，T_{ij} をテンソルとすれば，

$$T_{ij}v_j, \quad T_{ji}v_j \tag{A.8}$$

はいずれもベクトルである．したがって，T_{ij} 及び T_{ji} は線形作用素である．前者を証明しよう．

$$u_i = T_{ij}v_j$$

とおき，u_i がベクトルの成分であることを示す．座標変換によって，u_i, v_i, T_{ij} がそれぞれ u'_i, v'_i, T'_{ij} になるとすれば，

$$u'_i = T'_{ij}v'_j.$$

これに $T'_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}T_{kl}$, $v'_j = \alpha_{mj}v_m$ を代入すれば，

$$u'_i = \alpha_{ki}\alpha_{lj}T_{kl}\alpha_{mj}v_m = \alpha_{ki}\delta_{lm}T_{kl}v_m = \alpha_{ki}(T_{kl}v_l) = \alpha_{ki}u_k$$

となって，u_i は変換則を満たすからベクトルである．

(A.8) の第2式についても同様に証明できる．

A.1.4 高階のテンソル

3つのベクトルを u_i，v_i，w_i とし，

$$T_{ijk} = u_i v_j w_k$$

とおけば，直角座標の変換によって

$$u'_l v'_m w'_n = \alpha_{il} u_i \alpha_{jm} v_j \alpha_{kn} w_k = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} u_i v_j w_k$$

すなわち，

$$T'_{lmn} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} T_{ijk}.$$

この変換をみたす 27 個の数の組として，3 階のテンソルが定義される．もっと高階のテンソルも同様に定義される．また，たとえば，3 階テンソル T_{ijk} と 2 階テンソル S_{ij} のテンソル積とし卜 5 階のテンソル

$$T_{ijk}\, S_{lm} \quad (i, j, k, l, m = 1, 2, 3)$$

が定義される．

テンソルの 2 つの異なる添字を一致させてそれについて 1 から 3 まで加える操作を**縮約** (contraction) という．一般に 1 つの縮約によってテンソルの階数が 2 つ下がる．たとえば，ベクトル u_i の発散 $\partial u_i/\partial x_i$ は 2 階のテンソル $\partial u_i/\partial x_j$ から縮約によって得られる 0 階のテンソル，すなわち，スカラーである．

演習 A.2

4 階のテンソル T_{ijkl} を縮約した T_{ijkk} は 2 階のテンソルであることをを示せ．

A.1.5　交代テンソル ϵ_{ijk}

クロネッカーのデルタとともによく用いられるものとして ϵ_{ijk} がある．これは (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶置換のとき，$\epsilon_{i,j,k} = 1$;　(i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の奇置換のとき，$\epsilon_{i,j,k} = -1$;　それ以外のとき，$\epsilon_{ijk} = 0$ によって定義される 3 階の**交代テンソル** (alternating tensor) である．$(1, 2, 3)$ の偶置換とは $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ のことであり，$(1, 2, 3)$ の奇置換とは $(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)$ のことである．この定義から，ϵ_{ijk} は 2 つの添字，例えば i と j を入れ換えると符号が変わる．ϵ_{ijk} はエディントン (Eddington) のイプシロン，レビ - チビタ (Levi-Civita) の記号，完全反対称単位テンソルなどと呼ばれる．ϵ_{ijk} を用いると，2 つのベクトル u_i, v_i の外積は

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k \tag{A.9}$$