# 第1章　流体力学の基礎方程式

流体力学は気体や液体の運動を扱う学問である．その適用範囲は驚くほど広い．地球の大気や海洋の運動も流体力学の対象である．本書は主として非圧縮な流れの基本的事柄と回転・成層流体の力学及び環境流体力学の解説を目的としている．この章は流体力学の基礎方程式の解説に当てられている．まず，応力と応力テンソルについて解説し，それに基づいて流体の特徴づけを行う．つぎに流体運動の記述法について述べ，質量保存則，運動方程式（運動量保存則），エネルギー方程式について解説する．粘性流体の運動方程式を完結するために流体運動に伴う流体要素の変形と応力とを関係づけることが必要になる．さらに渦度の概念と渦度の支配方程式について述べる．本書ではほとんどの場合非圧縮な流れを扱うが，この章ではできるだけ一般性を持たせた．また，本書ではベクトル記法とテンソル記法を必要に応じて適宜用いる．

## 1.1　流体と流体力学

ふつうには液体と気体を総称して**流体** (fluid) という．固体は変形しようとする作用に抵抗するのに対し，流体は圧縮に対しては抵抗するが，変形しようとする作用に対しては抵抗できず，いくらでも変形する．この性質が流体の特徴であって，“流れる” という現象にもつながっている．次節ではこの性質を流体の力学的定義として採用する．流体として扱えるかどうかは，どんな時間，空間スケールに注目するかによる．例えば，マントルは，通常は固体と見なされるが，非常に長い時間及び空間スケールで変形が起こっているマントル対流を考えるときには流体と見なすことができる．

**流体力学** (fluid mechanics) とは流体を**連続体** (continuum) と仮定し，その**巨視的な運動** (macroscopic motion) を論じる学問のことである．物質は微視的には分子からなる不連続な構造を持つ．物質を構成する分子数は一般に $10^{23}$ 個

といった莫大なものであるから，個々の分子の運動から物質の巨視的な運動を説明することは現実的ではない．流体力学では流体物質の微視的な構造を無視して連続体として扱い，その巨視的な運動を論じる．速度，密度，圧力，温度などの少数の**巨視的変数** (macroscopic variables) によって現象を記述するのである．このように流体物質を連続体と見なすことによって，微視的構造が大きく異なる空気と水を統一的に取り扱えるといった利点も生まれる．流体力学が様々な工学的応用，生物，大気・海洋，宇宙など広大な応用範囲をもっているのは，このように流体力学が個々の流体物質によらない統一的な枠組みであるということも一因である．

現実の流体が連続体とみなされるための条件を考えてみよう．連続体仮説の下では，われわれは例えば流体の密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ は空間の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$†と時間 $t$ の連続関数（通常は適当な階数の偏導関数も含めて）と考える．気体の密度を分子的に見てみよう．時刻 $t$ において，点 $\boldsymbol{r}$ を中心とした長さスケール $\delta\ell$ の体積 $\delta V$ 内にある分子数を $N$，分子の質量を $m$ とすれば，$Nm/\delta V$ が平均の密度である．この平均密度の $\delta\ell \to 0$ の極限が連続体近似における密度である．しかし，物理的にはこのような極限値は存在しないことは明らかである．$\delta\ell$ を小さくして分子と同程度の大きさになると物質構造の不連続性を直接反映して，平均の密度が不連続的に変動するからである．逆に，$\delta\ell$ を大きくしていき，$\delta V$ が十分多くの気体分子を含むようになると平均密度は一定値を保つようになる．この値が実際の密度の局所的な値である．$\delta\ell$ をさらに大きくしていき，注目する巨視的現象の長さのスケール $L_{\mathrm{macro}}$ 程度になると（密度が巨視的に変動すると仮定して），平均密度は，こんどは巨視的な変動の影響を受けて変動することになる．上記のような平均値が一定値をとるような $\delta\ell$ の十分広い範囲が存在すれば，事実上連続体近似が成立するといえる．

また，通常われわれは流体は**局所熱平衡状態** (locally thermal equilibrium) あるいはそれに近い状態にあり，$L_{\mathrm{macro}}$ に比べて無視し得るほど小さいが，十分多くの分子を含む体積 $\delta V$ において，温度などの熱力学的な諸量に対して平衡熱力学の関係式が適用できると仮定する‡．このためには注目する巨視的現象の

† 以下では単に点 $\boldsymbol{r}$ ということにする．

‡ このことについては 1.9 節でもう少し詳しく述べる．

時間スケール $T_{\mathrm{macro}}$ に比べてずっと短い時間の間に分子が十分頻繁に衝突する必要がある．

これらの条件が成り立つためには次の 2 つの条件が必要である．

（1）物質分子の**平均自由行程** (mean free path)，つまり，分子が他の分子と衝突するまでに動く平均距離を $\lambda$ とするとき，

$$\lambda \ll L_{\mathrm{macro}}.$$

（2）物質分子の**平均自由時間** (mean free time)，つまり，分子が他の分子と衝突するまでの平均時間を $\tau$ とするとき，

$$\tau \ll T_{\mathrm{macro}}.$$

$0°$C，1 気圧の空気では $\lambda \sim 6 \times 10^{-6}$cm，$\tau \sim 10^{-10}$s であるから，日常的な現象についてはこれらの条件は十分満たされている．また，連続体と見なせるかどうかはどのような現象に注目するかによるのであって，銀河系のような星の集団も平均の星間距離よりもはるかに大きなスケールの現象に注目する場合には連続体として取り扱うことができる．

物理的には上記のように，平均密度が一定値を取る $\delta\ell$ には下限があるわけであるが，連続体というのはこの性質を満たす $\delta\ell$ をいくらでも小さく取れると考えた仮想的な媒質なのである．以下では，流体を連続体と仮定し，流体を記述する密度，速度，圧力，温度などの巨視的変数は流れの領域における点 $\boldsymbol{r}$ と時間 $t$ の連続関数と仮定する．

## 1.2 応力と応力テンソル

### 1.2.1 体積力と面積力

流体には一般に 2 種類の力が働く．1 つは重力，電磁力，慣性力などの**体積力** (body force) であり，単位質量当たりの力を $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}, t)$，流体の密度を $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ とすれば，点 $\boldsymbol{r}$ における体積要素 $\delta V$ に働く力は

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}, t)\,\rho\,\delta V \tag{1.1}$$

である．もう 1 つは面の両側の流体がその面を通じて互いに及ぼし合う**面積力** (surface force) であって，その単位面積当たりの力を**応力** (stress) と呼ぶ．体積力が一般に遠達力であるのに対し，面積力は分子的な起源をもつ近接力である．空気と水では面積力の分子的機構は異なるけれども，連続体としてはそのような違いを無視して同じ形式で記述するわけである．

### 1.2.2　応力と応力テンソル

応力について考えよう．一般に応力はそれが作用する面の向きに依存する．図 1.1 のように時刻 $t$ において，流体中の点 $\boldsymbol{r}$ で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と面積 $\delta S$ を持つ微小な面を考える．この面を通じて面の表側（ $\boldsymbol{n}$ が向いている側を表側と定義する）の流体が裏側の流体に及ぼす力を

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)\,\delta S \tag{1.2}$$

と書き，単位面積当たりの力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ を時刻 $t$，点 $\boldsymbol{r}$ においてその面に作用する応力という．$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分を**法線応力** (normal stress)，面（正確

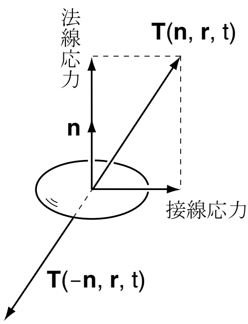


図 1.1　面の向きと応力

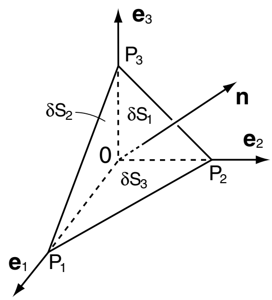


図 1.2　座標軸に垂直な 3 つの面を持つ微小な四面体

には接平面）に平行な成分を**接線応力** (tangential stress) と呼ぶ．$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ は面の表側の流体が裏側の流体に及ぼす応力であるが，面の裏側の流体が表側の流体に及ぼす応力は $\boldsymbol{n}$ を $-\boldsymbol{n}$ で置き換えて，$\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ と表される．したがっ

て，作用反作用の法則によって

$$\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n},\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r},t) \tag{1.3}$$

が成り立つ．それゆえ，もし法線応力が正ならその面を通じて流体は引っ張り合っており，負なら押し合っている．以後，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r},t)$ の $\boldsymbol{r},t$ を省略する．

さて，図 1.2 の微小な四面体に働く力の釣り合いを考えよう．この四面体に働く力は慣性力，外力及び 4 つの面を通じて作用する面積力である．慣性力と外力は体積力であって四面体の代表的な長さを $\delta\ell$ とするとき，$O((\delta\ell)^3)$ である．これに対して面積力は $O((\delta\ell)^2)$ であるから，$\delta\ell\to 0$ のときには体積力の寄与が無視できて，四面体の 4 つの面に作用する面積力の釣り合いの式

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})\delta S+\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{e}_j)\delta S_j=0 \tag{1.4}$$

を得る．われわれは力の釣り合いにおいて慣性力をも考慮したので，この関係は運動している流体中でも成り立つことに注意しよう．ここで $\delta S$ は $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積，$\delta S_j$ は $x_j$ 軸に垂直な面の面積である．また，$\boldsymbol{e}_j$ は $x_j$ 軸方向の単位ベクトルである†．ベクトル $\boldsymbol{T}$ の $x_i$ 成分を $T_i$ のように表す．また，このことを

$$\boldsymbol{T}=(T_1,T_2,T_3)$$

とも書く‡．これは

$$\boldsymbol{T}=T_1\boldsymbol{e}_1+T_2\boldsymbol{e}_2+T_3\boldsymbol{e}_3=\sum_{j=1}^{3}T_j\boldsymbol{e}_j \tag{1.5}$$

を意味する．さらに，(1.5) を総和記号を省略して

$$\boldsymbol{T}=T_j\boldsymbol{e}_j \tag{1.6}$$

と略記する．つまり，特に断らない限り，同じラテン文字の添字が 2 度現れたらそれらについて 1 から 3 まで和を取るものと約束するのである（アインシュ

† $x_1,x_2,x_3$ はそれぞれ $x,y,z$ を意味し，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ はそれぞれ $xyz$ 軸の基本ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を意味する．以後，両者を適宜用いる．また，特に断らなくても適当な $xyz$ 直角座標系が設定されているものとする．

‡ 本来，縦ベクトルで表示すべきであろうが，紙数の節約のため横ベクトルで表示する．$T_i$ を成分とするベクトルという代わりに単にベクトル $T_i$ という言い方もする．