第2章　完全流体の力学

流体は一般には粘性流体である．すなわち前章で述べられたように，運動する流体には，流体の粘性によって接線応力が現れる．身近な例として，円筒形の容器に水を入れて容器を回転させる場合を考えてみよう．容器が円形であるにもかかわらず，水は器壁に引きずられて運動をはじめる．このことからも，実際の流体は粘性流体であることが実感できる．

これに対して非粘性流体を完全流体，あるいは理想流体と呼ぶ．実際には，超流動現象などの非常に特殊な場合を除いて完全流体は存在せず，流体力学の理論展開における簡単化のために導入された抽象的な概念である．しかし，非粘性という仮定によって得られる理論解析上の恩恵は大変大きいものがあり，しかも幸運にも，日常取り扱われている空気や水の粘性は小さいので，完全流体の力学によって実在の流れの特徴がうまく説明し得ることが多い．また，完全流体という極限化された流体の運動特性を調べることによって，逆に実在の流体における粘性などの影響を正しく理解し把握することができると考えられる．そこで本章では，完全流体の力学および解析方法について述べる．

2.1　ラグランジュの渦定理

1.10 節では，渦度 $(\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u})$ の従う方程式として，一般的な粘性流体中での渦度方程式が導かれた．渦度は流体粒子の剛体的回転の角速度に関係しているので，質点系の力学における角運動量保存則に対応する法則が，完全流体の力学においても成立するのではないかと期待される．実際，完全流体の仮定のもとで考えると，非常に有用な渦定理を導くことができるので，本節ではそれについて述べよう．

まず，完全流体に対するオイラー方程式に対して，順圧流れ，すなわち密度 ρ と圧力 p には $\rho = f(p)$ の関係が成り立つとし，更に外力は保存力であると仮

定して式変形すると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{1}{2}q^2 + P + \Pi\right) + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}\,,\\&q = |\boldsymbol{u}|\,,\quad P = \int^p \frac{d\,p'}{\rho} = \int^p \frac{d\,p'}{f(p')}\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

となる．ここで Π は外力のポテンシャルである．一様な重力の場で非圧縮性流体が運動する場合には，(2.1) に現れている P, Π は

$$P = \frac{p}{\rho}\,,\quad \Pi = g\,z \tag{2.2}$$

と考えればよい．ただし g は重力加速度，z は鉛直上向きを正とする座標である．

さて (2.1) の両辺に $\nabla\times$ を作用させると，$\nabla\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}$ であり，また任意のスカラー関数 F に対して $\nabla\times\nabla F = 0$ であることから，直ちに次式が得られる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega})\,. \tag{2.3}$$

あるいは 1.10 節で示された式変形によって（演習 2.1）

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} \tag{2.4}$$

が得られる．(2.3) あるいは (2.4) を**完全流体に対する渦度方程式** (vorticity equation for perfect fluid) という．

この式によれば，渦度の時間変化には，外力も圧力も無関係である．なぜならば，微小な球状の流体要素を考えると，外力は球の重心に働くし，また圧力は球の表面に直角に働くので，重心まわりの回転モーメントを発生しないからである．したがって，微小球の流体要素の角運動量は運動中不変に保たれている．それゆえ，ある瞬間に微小球が回転していなければ，いつまでも回転をすることはなく，また逆に，最初に回転していたとすれば，いつまでも回転し続けることになる．微小な流体要素の角速度は渦度の 1/2 であるから，上述のことは，完全流体では渦は不生不滅であることを意味する．これが**ラグランジュの渦定理** (Lagrange's vortex theorem) であり，内容を簡約して，渦の不生不滅の定理ともいわれている．

(2.4) を用いて，ラグランジュの渦定理を微分方程式の観点から説明しよう．$t=0$ の時に $\boldsymbol{\omega}=0$ であったとすると，(2.4) から流体粒子の物質微分は

$$\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\right]_{t=0}=0 \tag{2.5}$$

である．したがって微小時間後 ($t=\delta t$) の流体粒子の $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=\delta t}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=0}+\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\right]_{t=0}\cdot\delta t=0 \tag{2.6}$$

によって依然として 0 である．同じように時間ステップを進めて考えていけば明らかなように，任意の時刻においてもやはり $\boldsymbol{\omega}=0$ である．

逆に $t=0$ において $\boldsymbol{\omega}\fallingdotseq 0$ であったとすると，上と同じ論理によっていつまでも $\boldsymbol{\omega}\fallingdotseq 0$ でなければならない．なぜなら，もし仮に，ある時刻に $\boldsymbol{\omega}=0$ となったとすると，その時刻からさかのぼって考えれば，上の論理によって $t=0$ で $\boldsymbol{\omega}=0$ でなければならなくなり，$t=0$ で $\boldsymbol{\omega}\fallingdotseq 0$ という前提に矛盾する．けっきょく，非粘性の順圧流体が保存力のもとに運動する場合，渦は発生することも消滅することもないということになる．

しかし冒頭でも述べたように，実際の流体は粘性流体であり，粘性の影響が顕著な物体表面のごく近傍（境界層）では渦は発生する．なぜなら，物体より遠方で $\boldsymbol{\omega}=0$ であったとしても，物体表面では壁面でのすべりなしの境界条件によって $\boldsymbol{\omega}=0$ の解が成立しないからである．ところが，境界層が物体からはがれると，境界層を形成していた渦が主流の中へ流れ出していくが，その渦はなかなか消滅しないし，流体中で新たに渦が発生することもほとんどない．これは，物体より少し離れたところでは，完全流体の仮定が実際上十分な精度で満たされていることを示している．

[Note - 2.1]

(2.3) を渦度方程式として説明したが，電磁流体力学でも (2.3) に対応する関係式が存在する．すなわち，流体が完全導体（電気抵抗が 0 ）である時，その中に磁場が存在すると，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，(2.3) の $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{B}$ でおきかえた式を満足する．したがって，磁束密度は完全流体における渦度と類似の性質を有し，完全電気伝導体の流体内部では，磁場はやはり不生不滅である．

ところで，流れの中のある領域で $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ の時，流れはその領域で**渦なし** (irrotational) であるという．ベクトル解析における恒等式として，任意のスカラー関数 Φ に対して $\nabla \times \nabla\Phi = 0$ が常に成り立っているので，渦なし流れでは

$$\boldsymbol{u} = \nabla\Phi \tag{2.7}$$

となるスカラー関数 Φ が定義できる．この関数の勾配が速度であるので，Φ を**速度ポテンシャル** (velocity potential) と呼ぶ．3 次元問題の場合，3 つの未知数を有するベクトル $\boldsymbol{u}$ が，1 個のスカラー関数 Φ から計算できるので数学的取扱いが大変簡単になる．一般に，速度ポテンシャルによって記述できる流れを**ポテンシャル流れ** (potential flow) というが，渦なし流れは常にポテンシャル流れである．なお，速度ポテンシャルに関する詳しい説明は 2.5 節で行う．

演習 2.1

(2.1)，(2.4) を導くための式変形を示せ．

2.2 循環と渦度

流れの中に任意の閉曲線 C をとり，曲線 C に沿っての $\boldsymbol{u}$ の線積分を考えよう．

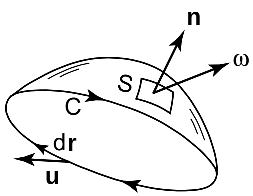

図 2.1 循環と渦度の関係

$$\Gamma(C) = \oint_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C u_s \, ds \tag{2.8}$$

ここで u_s は流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ の C に対する接線方向成分であり，$\Gamma(C)$ を C に沿っての**循環** (circulation) と呼ぶ．

ベクトル解析のストークスの定理（図 2.1 および［**Note-1.6**］参照）を用いると，上式は

$$\Gamma(C) = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \iint_S \omega_n \, dS \tag{2.9}$$

と変形され，循環と渦度の関係が与えられる．すなわち，循環 $\Gamma(C)$ は，閉曲線 C によってへりを囲まれた任意の曲面 S 上での渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の法線成分 ω_n の積分に等しい．

ここで，断面積 σ の非常に細い渦管を考え，(2.9) の積分表面として渦管の直断面をとると，断面内では $\omega_n = \omega$ はほとんど一定と考えられるので

$$\varGamma(C) = \iint_S \omega_n \, dS = \omega \iint_S dS = \omega\,\sigma \tag{2.10}$$

と表すことができる．この値は渦管のどの位置で考えても同じである（ C の選び方によらない）ので，**渦管の強さ** (strength of vortex tube) と呼ばれる．

１本の渦管について考えると，渦管の強さは場所に関係なく一定であるので，細いところほど渦度の大きさ ω が大きく，したがって流体粒子の回転角速度は大きいことに注意しよう．

太い渦管の場合でも，それが多数の細い渦管の集合と考えればよく，

$$\varGamma(C) = \iint_S \omega_n \, dS = \sum_{i=1}^{N} \omega_i\,\sigma_i \tag{2.11}$$

と表すことができる．すなわち，任意の閉曲線 C に沿っての循環は，C を通りぬける渦管の強さの総和に等しいことを表している．

ここで，循環 $\varGamma(C)$ と速度ポテンシャル $\varPhi$ の関係について述べておく．(2.7) を (2.8) を代入すると

$$\varGamma(C) = \oint_C \nabla\varPhi \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \frac{\partial \varPhi}{\partial x_j}\, dx_j = \big[\,\varPhi\,\big]_C \tag{2.12}$$

が得られる．すなわち，流体領域内にある任意の閉曲線 C に沿っての循環は C を一周する時の $\varPhi$ の変化である．つまり循環が 0 でないということは速度ポテンシャルに多価性があることを意味する．しかし流速は場所の 1 価関数（場所を指定すれば，そこでの流速はただ一つに確定している）であるから，$\boldsymbol{u} = \nabla\varPhi$ によって流速を求める際には，この多価性は消え去る．

2.3 循環定理と渦定理

2.3.1 ケルヴィンの循環定理

2.2 節では，ある一定の時刻における渦管の性質について述べただけであるので，次に渦管の時間的変化について考えよう．そのためにまず，流れとともも