

第3章 自由表面波の理論

海面上の波に関連したいろいろな現象は、海洋物理や海洋工学の分野において興味深い数多くの研究テーマを与えてくれる．“波”の問題は、大気と海洋の境界面に発生する表面波だけでなく、密度の異なる成層流体中に発生する内部波も含まれるし、周波数（あるいは波長）の観点からでも、高周波数のさざ波から地球の自転によるコリオリ（Coriolis）力が関係する超低周波数の波まで、その範囲は非常に広い．しかしながら本章で取り扱う波は、波長で言うならば数十 cm から数十 m のオーダーのものであり、一般の海面上で見られる、いわゆる自由表面波（free surface wave）であるとする．

このような自由表面波では粘性の影響は無視できるほど十分に小さいので、前章で考えた非圧縮性完全流体としての記述が可能である．また流体運動が静止状態あるいは渦なし状態から始まるとすると、ラグランジュの渦定理によって以後の流体運動も渦なし（非回転）でなければならない．すなわち流れ場は速度ポテンシャルによって記述できるので、次に速度ポテンシャルをどのように求めるかについて考えよう．

3.1 自由表面での境界条件式

速度ポテンシャル ϕ の支配方程式は、2.5 節の (2.25) で示したようにラプラス方程式である．それを解くためには、球や円柱まわりの流れ場を決定する時に示したように、境界条件式を与えなければならない．自由表面波の問題を複雑にしている最大の理由は、重力場の影響を受ける自由表面の存在であり、そこでの条件式（これを自由表面条件式という）が、以下に示すように、 ϕ に関して非線形であることによる．とは言っても、現象の大部分は線形項によって説明できるであろうし、解析解を求める上でも境界値問題の線形化は必要であるので、その手法についても説明する．

さて、静止水面上に直角座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の x 軸と y 軸をとり、鉛直上向きに z 軸をとる。この空間座標を用いて境界面が $F(x, y, z, t) = 0$ という関数形で与えられている場合には、そこでの境界条件式は必ず境界面の物質微分を計算することによって求められる。なぜなら境界面での流体粒子は時々刻々必ず境界面と同じ動きをするからである。すなわち次式が成り立つ。

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla \right) F = 0 \quad \text{on } F = 0. \quad (3.1)$$

境界面上での法線ベクトルが $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ で計算できるので、(3.1) を $|\nabla F|$ で割ると、

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t} \equiv V_n \quad \text{on } F = 0 \quad (3.2)$$

が得られる。これは Φ に関する境界条件式を与え、しかも原理的にはどんな境界面に対しても適用できる。(3.1) による条件式を運動学的条件 (kinematic condition) という。

ところで水波の問題では、自由表面も境界面の一つである。それが $z = \zeta(x, y, t)$ で表されるとすると、(3.1) の F は

$$F = z - \zeta(x, y, t) = 0 \quad (3.3)$$

で与えられる。したがって (3.1) あるいは (3.2) によって、速度ポテンシャル Φ に関する境界条件式が与えられるはずである。ところが $\zeta(x, y, t)$ も求めるべき量であり、これは一般的には解が確定するまで与えられない。すなわち自由表面上ではもう一つ条件式が必要である。

そこで、自由表面上では圧力が常に大気圧に等しいとする、いわゆる力学的条件 (dynamic condition) を付け加える。これは、2.4 節 (2.18) のベルヌーイの圧力方程式によって次式となる。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + g\zeta = 0 \quad \text{on } z = \zeta(x, y, t). \quad (3.4)$$

原理的には (3.1), (3.4) から ζ を消去すれば Φ に関する境界条件式が得られる。しかしその境界条件式は非線形であり、しかも (3.4) からわかるように、境

界条件式を適用すべき位置も未知数のままである．そこで，解析的な取扱いを容易にするために線形化を行う．

波振幅 (ζ) が小さいと仮定すると，(3.4) によって Φ も ζ と同じオーダーと考えられるので， Φ および ζ に関する 2 次以上の項を省略する．この時，(3.4)，(3.1) は次のようになる．

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + O(\Phi^2), \quad (3.5)$$

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + O(\zeta \Phi) = 0. \quad (3.6)$$

両式より ζ を消去すると

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + O(\Phi^2) = 0 \quad \text{on } z = \zeta \quad (3.7)$$

を得る．しかしこの条件式はまだ実際の水面 $z = \zeta$ において満足すべき式となっている．そこで ζ が微小量であるから $z = 0$ の静止水面まわりにテイラー展開すると

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, 0, t) + \zeta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} + \cdots \quad (3.8)$$

この時，(3.7) を $z = 0$ で適用することによって生じる誤差は $O(\Phi^2)$ 以上の高次であることがわかる．したがって，線形自由表面条件式 (linearized free-surface condition) は次のように表すことができる．

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0. \quad (3.9)$$

Φ が確定すれば，線形理論での水面変位 $z = \zeta$ は (3.5) から求めることができる．

以上に示した手順は，線形の境界条件式を導くだけならいいとしても，さらに高次の境界条件式を考える際には複雑である．そこで，同じ結果が得られるもう少し便利な方法を紹介しよう．

自由表面においては，流体粒子の動きに合わせて圧力も常に一定値 (大気圧) であるから，圧力の物質微分を 0 とおくことができる．すなわち

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \right) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + gz \right] = 0 \quad \text{on } z = \zeta. \quad (3.10)$$

したがって

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + 2\nabla \Phi \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) = 0 \quad \text{on } z = \zeta. \quad (3.11)$$

となり, この式で $O(\Phi^2)$ 以上を省略すれば容易に (3.9) が得られる.

テイラー展開 (3.8) と ζ として (3.5) を用いるならば, $z = 0$ で適用される高次の自由表面条件式も (3.11) から比較的容易に導くことができる. 例えば $O(\Phi^2)$ まで考慮した自由表面条件式は次式となる.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -2\nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad \text{on } z = 0. \quad (3.12)$$

演習 3.1

(3.2) を得る過程で, 境界面が $F(x, y, z) = 0$ で与えられる時, 法線ベクトルは $n = \nabla F / |\nabla F|$ で計算できるとしている. この式にしたがって次に示す 3 次元回転楕円体

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \cos \varphi, \quad z = b \sin \theta \sin \varphi$$

の法線ベクトルを計算せよ. 結果は次式となるはずである.

$$n_1 = \epsilon \cos \theta / \Delta, \quad n_2 = \sin \theta \cos \varphi / \Delta, \quad n_3 = \sin \theta \sin \varphi / \Delta.$$

ただし

$$\Delta = \sqrt{\sin^2 \theta + \epsilon^2 \cos^2 \theta}, \quad \epsilon = b/a.$$

演習 3.2

(3.1), (3.4) から ζ を消去し, さらに (3.8) のようなテイラー展開を適用することによって, (3.12) に示す 2 次の自由表面条件式を導け.

3.2 微小振幅の進行波

この節では水波の理論として最も基本的な微小振幅の 2 次元進行波について述べる. 簡単のため水深は一定 ($z = -h$) とし, 波の進行方向は x 軸の正方向とする (図 3.1 参照). 進行波の片振幅を a , 円周波数を ω とすると, 水面での波形は正弦波で表せるから

$$z = \zeta(x, t) = a \cos(\omega t - kx) \quad (3.13)$$

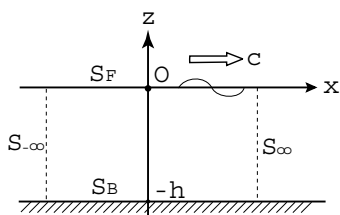


図 3.1 微小振幅波の解析における座標系

と書ける．ここで k は波数 (wavenumber) と呼ばれ，進行波の波長を λ とすれば $k = 2\pi/\lambda$ で与えられる．

(3.13) は位相関数として $\omega t - kx$ をもつ正弦関数で表されており，これが x 軸の正方向へ進行する波を表すことに留意されたい．それを確かめるために微小時間後 $t + \delta t$ を考える．この時， x 軸方向に進行するから $x + \delta x$ の位置で同じ

波形となっているはずである．したがって

$$\omega t - kx = \omega(t + \delta t) - k(x + \delta x),$$

すなわち

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\omega}{k} \equiv c > 0 \quad (3.14)$$

となり，進行速度が正となっていることがわかる．(3.14) の c を位相速度 (phase velocity) という． x 軸の負方向に進行する波の位相関数は，もちろん $\omega t + kx$ となる．これらのことを $f(\omega t - kx)$ の一般形に対して表すならば，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = (\omega - ck) f' = 0 \quad (3.15)$$

となっていることに注意しよう．

次に，2次元進行波を表す速度ポテンシャル Φ を求めよう． Φ の支配方程式は2次元ラプラス方程式である．流体領域を取り囲む境界面として，図3.1に示すように，自由表面 S_F ，水底 S_B ，ならびに $x \rightarrow \pm\infty$ での仮想境界面 $S_{\pm\infty}$ を考え，そこでの境界条件式を満たすように Φ を決定すればよい．

$$\text{連続の式 [L]} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{for } z \leq 0, \quad (3.16)$$

$$\text{自由表面条件 [F]} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0, \quad (3.17)$$

$$\text{水底条件 [B]} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = -h. \quad (3.18)$$

$S_{\pm\infty}$ での境界条件は明示されていないが、ここは仮想面であるから、物理的にもっともらしい解を与えるような条件としておこう。今の問題では、 x 軸の正方向に波が伝播していくというのがその条件である。これは既に述べたように、位相関数が $f(\omega t - kx)$ の形となっていれば満足される。そこで速度ポテンシャルを次の形に仮定する。

$$\Phi(x, z, t) = Z(z) \sin(\omega t - kx). \quad (3.19)$$

これを (3.16) に代入すると、 $Z(z)$ に関する微分方程式が

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (3.20)$$

となる。この一般解は

$$Z(z) = D_1 e^{kz} + D_2 e^{-kz} \quad (3.21)$$

で与えられる。ただし D_1, D_2 は任意定数である。

これらを決定するために、自由表面条件 $[F]$ と水底条件 $[B]$ に代入すると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} D_1(\omega^2 - gk) + D_2(\omega^2 + gk) &= 0, \\ D_1 e^{-kh} - D_2 e^{kh} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

ここで $D_1 = D_2 = 0$ 以外の解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - gk & \omega^2 + gk \\ e^{-kh} & -e^{kh} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.23)$$

すなわち

$$k \tanh kh = \frac{\omega^2}{g} \equiv K \quad (3.24)$$

が条件となる。これは、 k と ω, g の間に成り立つべき関係式を与える固有方程式である。この時の固有解は

$$D_1 e^{-kh} = D_2 e^{kh} \equiv \frac{1}{2} D \quad (3.25)$$

とおけば、未知数を 1 個含んだ形として

$$\Phi(x, z, t) = D \cosh k(z + h) \sin(\omega t - kx) \quad (3.26)$$

と表すことができる． $[F]$, $[B]$ とともに同次の境界条件式であったから， D は未知数のままである．これを決定するために自由表面上の波形を求めてみよう．波形は (3.13) であるから，(3.5) を用いて

$$\begin{aligned}\zeta &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0} = -D \frac{\omega}{g} \cosh(kh) \cos(\omega t - kx) \\ &= a \cos(\omega t - kx).\end{aligned}\quad (3.27)$$

したがって

$$D = -\frac{ga}{\omega \cosh kh} \quad (3.28)$$

と決定することができた．

結局，求めるべき速度ポテンシャルは次のように表すことができる．

$$\Phi = -\frac{ga}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx). \quad (3.29)$$

あるいは複素数表示を用いて

$$\Phi(x, z, t) = \operatorname{Re} \left[\phi(x, z) e^{i\omega t} \right], \quad (3.30)$$

$$\phi(x, z) = \frac{iga}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{-ikx} \quad (3.31)$$

と表す．すなわち，時間項は $e^{i\omega t}$ と分離して表しておき，最終的には (3.30) のように実数部分だけを取ると約束して，複素数で表された速度ポテンシャル $\phi(x, z)$ を考えることにする（複素数表示は後の計算が便利のように導入したものであり，第2章で説明した複素速度ポテンシャル $f(z)$ とは全く異なることに注意しよう．）

(3.24) の意味についてもう少し考えてみる．(3.14) と (3.24) から，位相速度 c は

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (3.32)$$

で与えられる．この式より，位相速度が波長 λ とともに変化することがわかる．

一般に任意波形の波は，無数の異なった波長の正弦波の重ね合わせであると考えられるので，(3.32) より，無数の正弦波から構成される波形は時々刻々に変化することになる．このことを波の分散といい，波長と位相速度の関係を表

した (3.32), あるいは (3.24) を分散関係 (dispersion relation) という.

(3.24) から k を陽な形で求めることは一般にはできないが, $y = \tanh kh$ は単純増加の関数であるので, (3.24) を満たす k は, 図 3.2 のように必ず 1 点求まる (これを $k = k_0$ と表す.) 水深が無限大 ($h \rightarrow \infty$) の時には $\tanh kh \rightarrow 1$ となるので $k_0 = K$ である. すなわち有限水深の波では必ず $K < k_0$ であるから, 水深が浅くなれば, 波長は無限水深での値よりもだんだん短くなる.

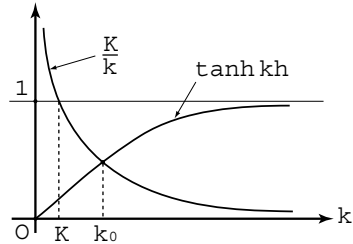


図 3.2 有限水深での波数 k_0 は無限水深の値 K よりも大きい.

(3.32) で水深が無限大の場合 ($h \rightarrow \infty$), および浅い場合 ($h \rightarrow 0$) の極限を考えると

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (h \rightarrow \infty), \quad (3.33)$$

$$c = \sqrt{gh} \quad (h \rightarrow 0) \quad (3.34)$$

となる. したがって, 浅水波 (あるいは $h/\lambda \rightarrow 0$ の場合であるから長波ともいう) の場合には, 位相速度は波長に関係しなくなるので, 波はもはや分散性ではないことがわかる. また (3.33) が正しいのは, 十分な精度で $\tanh kh \sim 1$ と近似できる場合であるが, これは $kh = 2\pi h/\lambda \geq 2.65$, すなわち $\lambda \leq 2.4h$ で 1.0% 以内の誤差で成り立っている. したがって実質的には, 水深が半波長以上あれば水深無限大として取り扱っても大きな誤差は生じないことになる.

3.3 水粒子の軌道, 質量輸送

波による水粒子の軌道を求めてみよう. この場合, ある特定の流体粒子の動きを追跡することになるので, ラグランジュ的に考えなければならない. そこで水粒子の位置を $\mathbf{r}_0(t) = (x_0(t), z_0(t))$ と表すと

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) \quad (3.35)$$

である． r_0 が時々刻々変化し，その移動量がオイラー座標 $r = (x, z)$ から見て $O(a)$ の微小量とすると， $r = (x, z)$ のまわりにテイラー展開して

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})\nabla\mathbf{u} + O(a^3) \quad (3.36)$$

と表すことができる．ここで $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla\Phi$ であるから， $O(a)$ での水粒子の軌道は (3.29) より

$$\left. \begin{aligned} (x_0 - x) &= \int \frac{\partial\Phi}{\partial x} dt = a \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx), \\ (z_0 - z) &= \int \frac{\partial\Phi}{\partial z} dt = a \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

となる．これより，有限水深での水粒子は楕円軌道を描くことがわかる．また波の進行方向が正の時には，水粒子の軌道をめぐる方向は時計まわりである．流速に関しては，波の山では波と同じ進行方向の速度をもち，波の谷では波の進行方向と逆方向になっている．

(3.37) を (3.36) の補正項に代入し，(3.24)，(3.29) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= a\omega \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega ka^2 \frac{\cosh 2k(z+h) - \cos 2(\omega t - kx)}{\sinh^2 kh} + O(a^3), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\frac{dz_0}{dt} = -a\omega \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) + O(a^3) \quad (3.39)$$

を得る．すなわち，水平方向の速度には時間に依存しない $O(a^2)$ の項があるため，水粒子の軌道は閉じず，平均的には水平方向に移動していくことがわかる．これをストークス・ドリフト (Stokes drift) という．

(3.38) を用いて 1 周期間の質量輸送量の平均値を計算してみる．時間平均は T を周期として

$$\overline{E} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T E dt \quad (3.40)$$

で計算できるから

$$\overline{M} = \rho \int_{-h}^0 \overline{\frac{dx_0}{dt}} dz = \frac{1}{2} \frac{\rho \omega a^2}{\tanh kh} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{1}{c} \quad (3.41)$$

を得る．ここで c は，(3.32) で与えられた位相速度である．

以上のようにストークス・ドリフトの現象は， $O(a^2)$ の非線形影響によって説明されるものであるが，実際の海面に浮かんでいる小さな浮体の動きを見てみると容易に観察することができる．

この現象をオイラー的に見ればどうであろうか． $O(a^2)$ のオーダーの速度ポテンシャルを考えても，波の谷より下の部分では時間的に周期関数であることに変わりはない ([Note-3.1] 参照)．したがって質量輸送は波の谷より下では起こり得ず，あるとすれば波の谷より上の部分からの寄与のうち， $O(a^2)$ の項を考えることになる．その時間平均値を計算すると

$$\overline{M} = \overline{\int_{-a}^c \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz} \approx \overline{\rho(\zeta + a) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{z=0}} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{k}{\omega} \quad (3.42)$$

となり，(3.41) と同じ結果が得られることがわかる．

[Note-3.1]

$O(a^2)$ に比例する 2 次の速度ポテンシャル $\phi^{(2)}$ を求めてみよう． $\phi^{(2)}$ が満足すべき自由表面条件式は (3.12) である．(3.12) の右辺に (3.30)，(3.31) を代入すると

$$\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = Q \quad \text{on } z = 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} Q &\equiv \left[-2\nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]_{z=0} \\ &= \text{Re} \left[i \frac{3}{2} \frac{g^2 a^2}{\omega} k^2 (1 - \tanh^2 kh) e^{i2(\omega t - kx)} \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

である．そこで，ラプラスの式， $z = -h$ での水底条件を満足し，かつ位相関数が $2(\omega t - kx)$ の形となるようにすれば解を次式の形に表すことができる．

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(2)} &= \text{Re} \left[\phi^{(2)}(x, z) e^{i2\omega t} \right], \\ \phi^{(2)}(x, z) &= D \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} e^{-i2kx} \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

ここで D は未定であり，自由表面条件 (3.43) から決定できる．結果は

$$D = i \frac{3}{4} \frac{g^2 a^2}{\omega} \frac{k(1 - \tanh^2 kh)}{(2 \tanh kh - \tanh 2kh)} \quad (3.46)$$

となる．これを (3.45) に代入し，分散関係を用いて整理すると最終的に次式が得られる．

$$\phi^{(2)}(x, z) = i \frac{3}{8} \omega a^2 \frac{\cosh 2k(z+h)}{\sinh^4 kh} e^{-i2kx}. \quad (3.47)$$

これは摂動法に基づくストークス波の第2近似と呼ばれている．無限水深の場合 ($h \rightarrow \infty$) には (3.44) から $Q = 0$ であるから (あるいは (3.47) で $h \rightarrow \infty$ としてもよい) $\Phi^{(2)}$ は存在しない．

演習 3.3

水深無限大での進行波の速度ポテンシャルを求めよ．それを用いて $O(a^2)$ の項まで考えた時の波面形状を計算せよ．計算式は (3.8) のようなテイラー展開を用いることによって，(3.4) から

$$\begin{aligned}\zeta &= \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial z} + \cdots\right) \left\{ -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \right\}_{z=0} \\ &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right)_{z=0} + O(\Phi^3)\end{aligned}$$

と与えられる．また得られた波面形状の特徴を文章で説明せよ．

3.4 群速度

3.2 節の説明で，単一の円周波数 ω ，波数 k を有する波は，(3.32) で与えられる位相速度で伝播することがわかった．次に ω, k ともに少しだけ異なる波の“群”について考えよう．すなわち

$$\delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \delta k = k_2 - k_1 \quad (3.48)$$

として2つの波の重ね合わせを考えると

$$\begin{aligned}\zeta &= \text{Re} \left[A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \right] \\ &= \text{Re} \left[A_1 \left\{ 1 + \frac{A_2}{A_1} e^{i(\delta\omega \cdot t - \delta k \cdot x)} \right\} e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} \right] \quad (3.49)\end{aligned}$$

と表すことができる．(3.49) の $\{\cdots\}$ は振幅変調を表す項であり， $\delta k, \delta\omega$ ともに小さいので，振幅はゆっくり変化することになる．この項が波の群を表すが，その進行速度，すなわち群速度 (group velocity) は (3.14) と同様の考え方によれば次式で与えられる．

$$c_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \quad (3.50)$$

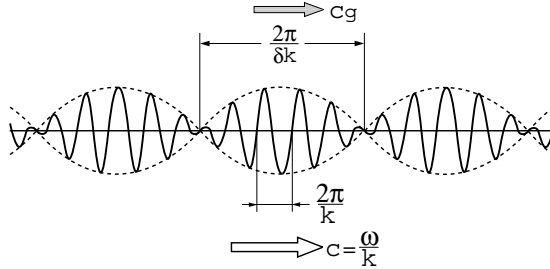


図 3.3 振幅変調を表す部分は、基礎となる正弦波（搬送波）の振幅の包絡線となっており、その進行速度（群速度）は $\delta\omega/\delta k$ である。

ここで $\delta\omega \rightarrow 0$, $\delta k \rightarrow 0$ の極限を考えるが、 $\delta\omega \cdot t$ および $\delta k \cdot x$ が有限となるほどに t, x が大きい場合を考えると、(3.49) の振幅変調は存続することになる。そのような場合には群速度 c_g は次のような有限の極限值を有する。

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (3.51)$$

(3.24) を用いて c_g を計算すると、有限水深の場合には次式となる。

$$c_g = \frac{1}{2} c \left[1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right]. \quad (3.52)$$

ここで c は位相速度である。

(3.52) で深水波 ($h \rightarrow \infty$)、浅水波 ($h \rightarrow 0$) の極限を考えると

$$c_g = \frac{1}{2} c \quad (h \rightarrow \infty), \quad (3.53)$$

$$c_g = c \quad (h \rightarrow 0) \quad (3.54)$$

となることがわかる。すなわち、水深無限大と見なせる場合には、群速度は位相速度の半分であり、非分散である浅水波では、群速度は位相速度に等しい。

以上の解説では (ω_1, k_1) と (ω_2, k_2) の2成分についてしか考えなかった。3成分以上、あるいはもっと一般的な場合にはどのように考えればよいだろうか。そのような疑問に対しては、ある波数 k を中心としてその近傍の波数を連続的に含む振幅スペクトルを考えればよいであろう。

振幅スペクトルを正規分布とすると、全体の波形は

$$\zeta = \operatorname{Re} \left[A \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k'-k)^2} e^{i\{\omega(k')t - k'x\}} dk' \right] \quad (3.55)$$

となる。ただし α はスペクトルの集中度を表すパラメータであり、 $\alpha \rightarrow \infty$ の極限では

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha k^2} = \delta(k) \quad (3.56)$$

のようにデルタ関数となる。したがって $\alpha \gg 1$ の時を考えると、 $k' = k$ の近傍でのみ 0 でない値をもつから

$$\omega(k') = \omega(k) + (k' - k) \frac{d\omega}{dk} \quad (3.57)$$

と近似できる。この時、(3.55) の指数部分は

$$\begin{aligned} & -\alpha(k' - k)^2 + i\{\omega(k')t - k'x\} \\ & = i(\omega t - kx) - \frac{1}{4\alpha} \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right)^2 - \alpha \left\{ (k' - k) + \frac{i}{2\alpha} \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

であるから k' に関する積分を実行すると次式を得ることができる。

$$\zeta \approx \operatorname{Re} \left[A \exp \left\{ -\frac{1}{4\alpha} \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right)^2 \right\} e^{i(\omega t - kx)} \right]. \quad (3.59)$$

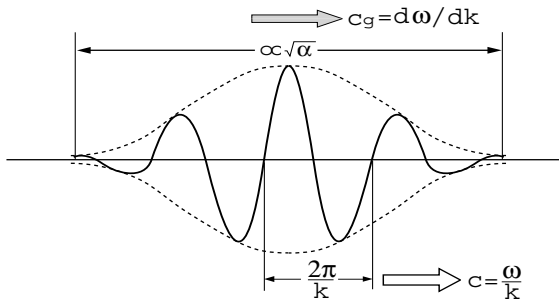


図 3.4 (3.59) は、座標 $x = (d\omega/dk)t$ の場所に最大の振幅を持つ単独の波群を表しており、その波群は速度 $d\omega/dk$ で進行する。

これは $x = (d\omega/dk)t$ のところに最大値をもつ波群の包絡線を表しており、その波群は速度 $d\omega/dk$ で進行すると解釈できる。これはもちろん (3.51) と同じであり、これが群速度である。

演習 3.4

無限水深での進行波の位相速度を c_∞ と表すと (3.32), (3.52) から

$$\frac{c}{c_\infty} = \sqrt{\tanh kh}, \quad (3.60)$$

$$\frac{c_g}{c_\infty} = \frac{c}{c_\infty} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right] \quad (3.61)$$

が得られる。横軸を kh として、これらの曲線を $0 \leq kh \leq 3$ についてプロットせよ。(3.60) は kh に対して単調増加曲線であるが、(3.61) はある kh の値で最大値を取る。(3.61) を微分することによってその kh を与える式を求めよ。

3.5 エネルギー保存の原理

本節では、物体に働く流体力の計算や波動の特性を調べる時に有用な完全流体中でのエネルギー保存の原理について述べる。

一般力学の知識に従えば、ある流体領域 V 内のエネルギーは、運動エネルギーと位置エネルギーの和で与えられるので、次式のように表すことができる。

$$E = \iiint_{V(t)} \rho \left[\frac{1}{2} q^2 + gz \right] dV = \iiint_{V(t)} \rho \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + gz \right] dV. \quad (3.62)$$

次に、このエネルギーの時間変化率を考えてみよう。(3.62) の流体領域 V の境界面 S が外向き法線速度 U_n で移動する場合には、ラグランジュ的な微分を考えないといけないので、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \left[\frac{1}{2} q^2 + gz \right] dV \\ &= \rho \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} q^2 + gz \right] dV + \rho \iint_S \left[\frac{1}{2} q^2 + gz \right] U_n dS. \end{aligned} \quad (3.63)$$

ここで圧力は大気圧を基準に考えることにすると、ベルヌーイの圧力式から次式を得る。

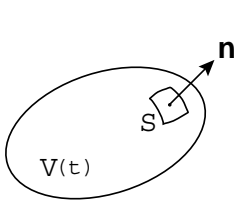


図 3.5 ガウスの定理の適用

$$\frac{1}{2} q^2 + gz = -\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right). \quad (3.64)$$

さらに

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} q^2 \right] = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla \Phi \right) \quad (3.65)$$

であるから，ガウスの定理を用いると次のように表すことができる．

$$\frac{dE}{dt} = \rho \iint_S \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) U_n \right] dS. \quad (3.66)$$

ここで境界面 S として，自由表面 S_F ，物体表面 S_H ，それに無限遠での境界面 S_∞ を考える． S_∞ は動かない境界面として考えると，それぞれの境界面上では

$$\left. \begin{array}{l} \text{on } S_C \quad U_n = 0, \\ \text{on } S_H \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_n = V_n, \\ \text{on } S_F \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_n, \quad p = 0 \end{array} \right\} \quad (3.67)$$

となっているはずである．ただし V_n は物体の法線速度であり，(3.2) のように与えられる．(3.67) を (3.66) に代入すると，

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_{S_H} p V_n dS + \rho \iint_{S_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (3.68)$$

が得られる．

次に (3.68) の 1 周期時間平均値を考えてみよう．法線の正方向は流体領域から外向きであることに注意すると，(3.68) の右辺第 1 項は，流体が物体になす仕事の符号を反対にしたもの，すなわち作用反作用の法則によって，物体が流体に対してなす仕事 W_D に等しい．考えている流体領域内の全エネルギーの時間変化率 dE/dt は，時間平均を取れば 0 であるから左辺は 0 となる．したがって，エネルギー保存則は次のように表すことができる．

$$W_D \equiv - \overline{\iint_{S_H} p V_n dS} = -\rho \overline{\iint_{S_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS}. \quad (3.69)$$

この式は，物体に働く造波減衰力と物体の動揺によって発生した進行波のもつエネルギーとの関係を知る上で有用である．もちろん物体が固定されている場合 ($V_n = 0$) には，(3.69) の左辺は 0 である．また固定されていない限り，外部の駆動装置などで強制的に動かされていない限り，物体は流体に対して仕事をしないから，その時にも (3.69) の左辺は 0 である．

3.6 進行波のエネルギーとその伝播速度

前節の結果を用いて 2 次元進行波のもつエネルギーを計算してみよう．2 次元波を考えるので，流体領域として y 軸方向には単位幅をとる．また x 軸方向にも単位長さを考えることにして，そこでの全エネルギーの 1 周期間の時間平均を考える．(3.62) によって

$$\overline{E} = \rho \int_{-h}^{\zeta} \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + gz \right] dz. \quad (3.70)$$

ただし

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (3.71)$$

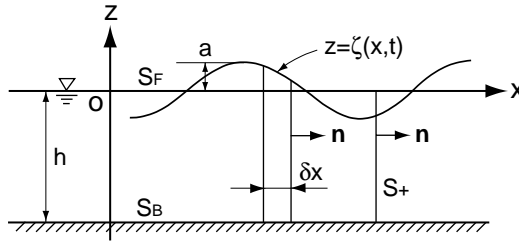


図 3.6 進行波のエネルギーとその伝播速度の計算における検査面

となる．ここで Φ に関して 2 次の項までは考慮し，3 次以上の項は高次として省略する．さらに，静止水面下での位置エネルギーは波動に関係なく存在するので，進行波のエネルギーを考える際には除外する．これらのことを考慮すると (3.70) は

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \frac{1}{2} \rho g \overline{\zeta^2} + O(\Phi^3) \quad (3.72)$$

とできる．この式に (3.30) を代入して時間平均を計算すればよいが，その計算には次の公式が便利である．

$$\overline{\operatorname{Re}[A e^{i\omega t}] \operatorname{Re}[B e^{i\omega t}]} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[A B^*]. \quad (3.73)$$

ただし B^* は B の複素共役である．

この式を用いて時間平均を先に計算し，次に (3.31) を代入して z の積分を行うと

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \frac{1}{4} \rho \left(\frac{g a k}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 k h} \int_{-h}^0 \cosh 2k(z+h) dz + \frac{1}{4} \rho g a^2 \\ &= \frac{1}{4} \rho g a^2 + \frac{1}{4} \rho g a^2 = \frac{1}{2} \rho g a^2 \end{aligned} \quad (3.74)$$

となることがわかる．すなわち，運動エネルギーと位置エネルギーは等しく，それぞれ $\rho g a^2/4$ である．またこれらは振幅だけで決まっており，水深にも無関係であることに注意されたい．

さらに，(3.74) と以前に求めた (3.41) を比べることによって

$$\overline{E} = \overline{M} c \quad (3.75)$$

の関係があることがわかる．すなわち，単位長さあたりの進行波のエネルギーは，ストークス・ドリフトによる質量輸送量の時間平均値 \overline{M} と位相速度 c の積に等しい．

次に，進行波のエネルギーの時間変化率を考えてみる．その計算式は (3.68) としてすでに与えられているが，ここでは物体は存在しないので，(3.68) の右辺第2項だけとなる．すなわち，エネルギー変化は静止水面に垂直な検査面だけを通して起こることがわかる． y 軸方向には単位幅をとり， x 軸方向に長さ δx だけ離れた二つの鉛直断面 ($S(x)$ および $S(x+\delta x)$) を考えると，そこでのエネルギー変化は

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} \delta x &= \rho \left(\int_{S(x+\delta x)} - \int_{S(x)} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz \cdot \delta x + O(\Phi^3) \end{aligned} \quad (3.76)$$

となる． Φ として (3.30), (3.31) を代入し, (3.73) の公式によって時間平均値を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{Re} \int_{-h}^0 (i \omega \phi) \frac{\partial \phi^*}{\partial x} dz \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{\omega}{k} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right\} \right]\end{aligned}\quad (3.77)$$

が得られる．すなわち (3.52), (3.74) を用いて

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c_g \bar{E}) = 0 \quad (3.78)$$

と表すことができる．これは, 進行波に関連して示した (3.15) と同様の形で表されており, (3.78) は, 進行波のもつ全エネルギー \bar{E} が群速度 c_g で伝播されることを示している．

演習 3.5

(3.73) を証明せよ．また (3.77) を得る式変形を示せ．

3.7 定在波

これまでは x 軸の正方向への進行波だけを考えてきたが, $x = 0$ の鉛直面に固定壁があり, そこで波が反射する場合を考えよう．この時 $x = 0$ での境界条件式として

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (3.79)$$

を付け加えなければならない．

これは x 軸の負方向に進行する

波と逆位相で正方向に進行する波とを重ね合わせることによって満足される．すなわち (3.29) を用いて

$$\begin{aligned}\Phi_s &= -\frac{ga}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \{ \sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx) \} \\ &= -\frac{2ga}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos kx \sin \omega t\end{aligned}\quad (3.80)$$

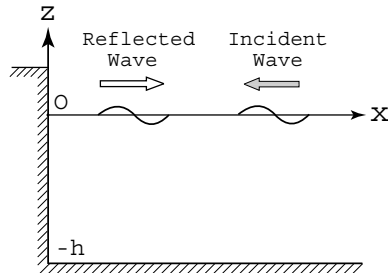


図 3.7 入射波は壁面で反射され, 定在波を造る．

を得るが、これは確かに (3.79) を満足している。この時の波形は

$$\zeta_s = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \right)_{z=0} = 2a \cos kx \cos \omega t \quad (3.81)$$

となっている。(3.80) あるいは (3.81) からわかるように、鉛直壁で反射されて合成された波は、もはや進行波ではなく、ある定位置で上下に振動しているにすぎない。このような波を定在波 (standing wave) という。

これは $x = m\pi/k$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) の点で振幅は最大となり、 $x = (m + \frac{1}{2})\pi/k$ の点では 0 となる。すなわち固定壁 ($x = 0$) も最大となる点であり、そのような点を腹 (loop), 反対に振幅が 0 となる点を節 (node) と呼ぶ。

(3.79) が示すように、腹となる位置では水粒子は水平方向に動かず、鉛直運動だけをしている。反対に節となる位置では常に振幅が 0 であるから水粒子は上下方向には動かず水平方向だけに運動している。

$x = m\pi/k$ で $\partial\Phi/\partial x = 0$ が実現されているということは、(3.80) は、 $x = m\pi/k$ を満たす位置にある 2 枚の鉛直固体壁で仕切られた容器の中の水の振動を表していると考えられる。この容器の x 方向の幅 ℓ は、半波長 $\lambda/2$ の自然数倍であればよい。すなわち容器の幅 ℓ が与えられた場合、波長 $\lambda = 2\ell/m$ ($m = 1, 2, \dots$) の定在波が固有振動として存在し得る。この時の固有振動数 ω_m は、(3.24) より

$$\omega_m = \sqrt{g \frac{m\pi}{\ell} \tanh\left(\frac{m\pi h}{\ell}\right)} \quad (3.82)$$

となっている。この式で水深の浅い場合 (すなわち長波近似) を考えると、その固有周期 T_m は

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\ell}{m} \frac{1}{\sqrt{gh}}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.83)$$

で与えられることがわかる。この周期 (特に $m = 1$ の場合) は、実際の湖や湾内での固有振動である静振 (seiche) の振動周期とよく一致することが知られている。

ところで定在波は、上に述べた 1 次元波に限らず、 (x, y) 面内の任意の閉曲線によって囲まれた領域内における 2 次元波としても考えることができる。そ

の場合に対する一般解を求めるには数値計算に頼らなければならないが、以下に述べるような長波近似を考える場合には取扱いが簡単になる。

長波近似では $h \ll \lambda$ であるから、3次元ラプラス方程式を $-h \leq z \leq 0$ にわたって積分すると、 z 微分を含まない項は一定値とみなすことができるので

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = -h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) \quad (3.84)$$

となる。ただし $z = -h$ での水底条件を考慮した。

(3.84) を自由表面条件に代入し、長波近似での位相速度 $c = \sqrt{gh}$ を用いると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right), \quad c = \sqrt{gh} \quad (3.85)$$

が得られる。この式では Φ は、もはや z の関数ではなく、 $\Phi = \Phi(x, y, t)$ と考えている。(3.85) は2次元の波動方程式であり、これに対する境界条件式は (x, y) 面での境界曲線 C_B 上で

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C_B \quad (3.86)$$

のように与えられる。

さて、定在波を表す Φ の解は

$$\Phi(x, y, t) = \phi(x, y) \sin \omega t \quad (3.87)$$

とおく時、(3.85) より ϕ に対する方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (3.88)$$

となる。これはヘルムホルツ方程式 (Helmholtz's equation) として知られている。

(3.88) を簡単な長方形の境界について考えてみよう。境界線 C_B を $x = 0, a$ および $y = 0, b$ で表せば、(3.86) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, & \text{at } x = 0, a \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, & \text{at } y = 0, b \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

と書ける。

(3.88) は変数分離法で解くことができる．すなわち $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ の形を仮定し，(3.88) に代入すると，

$$X'' + p^2 X = 0, \quad Y'' + q^2 Y = 0 \quad (3.90)$$

の微分方程式が得られる．ただし， $k^2 = p^2 + q^2$ である．(3.89) を満たすように，それぞれの微分方程式の解を求めると，

$$\left. \begin{aligned} X &= C \cos(px), & p &= \frac{m\pi}{a} \\ Y &= D \cos(qy), & q &= \frac{n\pi}{b} \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

となる．ただし C, D は任意定数である．この結果を $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ に代入すると，

$$\phi(x, y) = A_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (3.92)$$

$$k^2 = \pi^2 \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\} \quad (3.93)$$

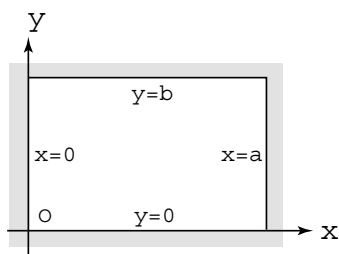


図 3.8 長方形境界を持つ場合の長波近似

が得られる．ここに m, n は自然数で， A_{mn} は任意定数である．(3.93) の波数 k は長波近似での固有値を与える．この式で y の依存性を省略して 1 次元波を考えると，それは当然のことながら (3.83) の結果と一致している．一般には，(3.92) の形の固有振動をすべて重ね合わせたものが長方形容器内の 2 次元定在長波を表す．

演習 3.6

(3.80) の計算は (3.79) の境界条件が示すように， $x = 0$ で波が完全反射する場合に対するものであった．これとは反対に $x = 0$ での壁が極端に柔らかいものと考えると，そこでの境界条件式は圧力が 0 ($p = 0$) とすることができる．この時の反射波の速度ポテンシャルを求めよ．

演習 3.7

次に $x = 0$ での壁が弾性板であり，水平方向の壁の局所変位がそこでの圧力に比例する場合を考えよう．比例定数を α とおき， $x = 0$ での境界条件式を求めよ．またそれを満足する反射波の速度ポテンシャルを求めよ．さらに得られた結果で $\alpha \rightarrow 0$ ， $\alpha \rightarrow \infty$ の極限を考えると，すでに求められている結果 ((3.80) 及び [演習 3.6]) となることを確かめよ．

演習 3.8

上で得られた結果から反射波係数 (反射波振幅 / 入射波振幅) を求めよ．また $x = 0$ の壁が流体に対してなした仕事を計算せよ．その計算式は (3.69) より

$$W_D = -\rho \int_{-h}^0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} dz = \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_{-h}^0 i \omega \phi^* \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} dz$$

で与えられる．得られた反射波係数，仕事 W_D の結果が意味することを考察せよ．