

第5章 乱流

一般に、流れはレイノルズ数が小さいうちは規則的で整然としたものであっても、レイノルズ数が大きくなるにつれて、時間空間的に不規則な流れに遷移する。整然とした流れを層流 (laminar flow), 不規則な流れを乱流 (turbulent flow) と呼ぶ。乱流は層流に比べて、微小擾乱に対して不安定で時・空間的に不規則である、強い非線形性を持ち運動が三次元的で非定常である、大きな輸送能力をもつ、大小様々なスケールの運動から成り巨大な自由度をもつ、大きなエネルギー散逸性を伴う、などの特徴をもつ。

さて、このように不規則な流れを記述するのが非常に困難であることは、容易に想像されよう。実際、乱流状態になった流れの厳密な記述は不可能といってよい。しかし、十分に不規則な現象には、その不規則さゆえに、性質には統計的にある規則性が出てくることがある。ちょうど統計力学では、分子の個々の不規則な運動の記述はできなくても、熱力学量という統計的性質を記述するのに成功しているように、乱流を取り扱う時にも速度の平均、分散、相関などの統計的性質を記述するのを目標とすることになる。この章ではこのような考え方を乱流に対してどのように適用していくのかを見ていこう。

5.1 流れの層流から乱流への遷移

5.1.1 円管内の流れ

ハーゲン (1839) とポアズイユ (1840, 1841) によって見い出された円管内の流れは、流れが定常で管軸方向に一様であるという仮定の下で得られたナビエ・ストークス方程式の厳密解であり、レイノルズ数に無関係に成立する解であった。この解によると、(4.33) で与えられるように、流量は圧力勾配に比例して増大するはずである。しかし、実際の流れでは、あるレイノルズ数以上に

なると流量は圧力勾配に比例しなくなり、圧力勾配から期待されるより少ない流量しか流れなくなる。これは上水の供給において大変重要な問題であった。

レイノルズ (1883) は円管の中に水を流し、水の速度と管の直径をいろいろ変え、管の入口付近に着色した水を注入することによって流れの模様を観察した。一本の管について流速を変えていくと、流れが比較的遅い間は着色した水が管の軸に平行な一本の細い筋となって流れる。この状態の流れは層流で、流量はハーゲン ポアズイユの法則に従う。さらに流速を増していき流速がある限界を越えると、急に着色した水の筋が乱れて色が管の全断面に広がってしまう。これは管内の流れが乱流状態に遷移したことを意味しており、流速分布は著しい運動量の拡散のため、(4.31) で与えられる放物線形ではなく、管の中心でほぼ一様で、管壁付近に大きな速度勾配をもつ分布となる。このため水流が管から受ける抵抗は増大し、同じ圧力勾配の下では流量は層流の場合よりも小さくなる。レイノルズは、管内の流れが層流から乱流に遷移する限界が、円管の直径 d 、断面平均流速 U 、動粘性係数 ν を用いて作られるレイノルズ数

$$Re \equiv \frac{Ud}{\nu} \quad (5.1)$$

で与えられることを示した。

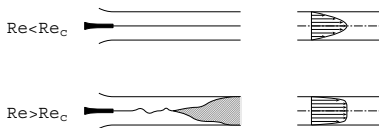


図 5.1 層流と乱流

流れが層流から乱流に遷移する限界のレイノルズ数は臨界レイノルズ数 (Re_c) と呼ばれる。管内に流入する流体がもつ乱れを十分小さくすると Re_c は大きくなるが、流体の乱れを大きくした極限では $Re_c \cong 2000$ となることが実験的に知られている。

5.1.2 円柱後流の遷移

一様流が円柱を通り過ぎた後にできる流れのパターンもレイノルズ数 ($Re \equiv Ud/\nu$) によって変わってくる。 $Re \leq 1$ の範囲では、流れは円柱に沿っており、定常で対称的なものである。 $Re = 1 \sim 10$ の範囲でも流れは依然として定常であるが、円柱の下流側に一對の渦 (双子渦) ができる。そして、この渦はレ

レイノルズ数とともに大きくなっていく。 $Re = 10 \sim 10^2$ では渦対はますます大きくなるが、その下流に振動が現れて、2列の渦が交互に並んだカルマン渦列 (Kármán's vortex street) が形成される。この流れは非定常ではあるが周期的である。 $Re = 10^2 \sim 10^5$ では渦列は乱れて非定常かつ非周期的な伴流 (wake) が形成される。さらに $Re > 10^5$ では円柱の伴流は完全な乱流状態となる。また、円柱表面に形成される境界層も乱流となり、伴流の幅は狭くなる。

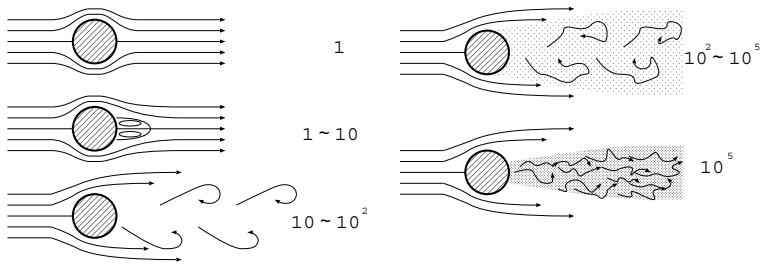


図 5.2 レイノルズ数と円柱の後流の様子

5.2 流れの安定性理論

第4章で粘性流の解をいくつか求めたが、それらはいずれも層流の解であった。しかし前節で示したように、実際にはそのような層流が実現しない場合もある。この食い違いは第4章で求めた解の近似が悪いからというわけではない。必要であれば近似の度合を上げていくことによって、十分に正確な層流の解を求めることができる（それどころか、そもそも4.2節で解いた流れの解は厳密解であった。）確かに、もし現実の状況が厳密に問題設定と同じものであれば、解析的に求められた解のような流れが実現されるのであるが、実際の自然界の流れにはごくわずかであっても乱れが存在する。このような小さな乱れは攪乱または擾乱 (disturbance) と呼ばれる（「擾乱」という訳語は地球流体力学でよく用いられる）が、レイノルズ数が大きくなると、流れにごくわずかな擾乱が加わっても流れの様子は元のものとは全く違ったものに移行してしまう。このような流れの状態のことを不安定 (unstable) であるという。これに対して、外

部擾乱があってももとの状態に戻ってくるような状態を安定 (stable) であるというが、ある粘性流が現実存在しうするためにはその流れが外部擾乱に対して安定でなければならないのである。ここでは、外部擾乱が主流に比べて非常に小さい場合の流体の安定性、つまり線形安定性 (linear stability) を調べる方法を紹介する。

非圧縮性粘性流体の連続の方程式とナビエ ストークス方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.3)$$

で与えられる。安定性を調べようとする層流の主流の流速を $U(\mathbf{r})$ 、圧力を $P(\mathbf{r})$ で表せば、 U と P は (5.3) と (5.2) の定常解であり、

$$\nabla \cdot U = 0, \quad (5.4)$$

$$(U \cdot \nabla) U = K - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 U \quad (5.5)$$

を満たす。いま、この定常解に速度 $u'(\mathbf{r}, 0)$ 、圧力 $p'(\mathbf{r}, 0)$ の擾乱を加えたとする。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= U(\mathbf{r}) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t), \\ p(\mathbf{r}, t) &= P(\mathbf{r}) + p'(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

はもとのナビエ ストークス方程式と連続の方程式を満たすから、(5.6) を (5.3), (5.2) に代入し、それぞれから (5.5), (5.4) を引くことによって u' と p' に対する方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) U + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (5.8)$$

となるが、微小擾乱の 2 次の微小量を無視することによって

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) U = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (5.10)$$

を得る。(5.9), (5.10) は u' , p' に関する線形方程式になっているが、線形方程式の解は重ね合わせができる。そのため、 $t \rightarrow \infty$ につれて大きくなっていく

解 u' , p' が 1 つでも存在する時には, 初期の擾乱にわずかであっても含まれているこの成分が時間とともに大きくなり, その結果として擾乱全体で考えても時間とともに大きくなってしまふことになる. したがってこのような場合には, 主流 U は不安定であると結論される. 逆に流れが安定であると結論されるのは, 全ての解 u' , p' の大きさが時間とともに小さくなっていくか有限に留まる場合に限られる. 特に安定の場合のうち, 擾乱の大きさが有限の一定値にとどまる場合を中立 (neutral) という.

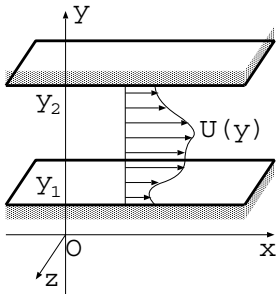


図 5.3 2次元平行流の基本場

ここではもう少し具体的な状況として 2次元平行流を考え, その安定性について述べることにしよう. 直角座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の x 軸を 2次元平行流の流れの方向に, y 軸を流れの変化の方向にとれば, 主流の速度は

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = (U(y), 0, 0) \quad (5.11)$$

で表されることになる. 擾乱の速度と圧力は, x, z 方向と時間に関して波の形をしたフーリエ成分

$$\begin{pmatrix} u'(\mathbf{r}, t) \\ p'(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(y) \\ \hat{p}(y) \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \quad (5.12)$$

を考えることにする. 任意の形の擾乱 u' , p' はさまざまな波数 (k_x, k_z) に対する (5.12) の形の u' , p' の和として書けるのである. この振動数 ω は実数として得られるとは限らず, ω の実数部と虚数部を分けて書くと (5.12) の $\exp[\]$ の部分は

$$\begin{aligned} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] &= \exp[i(k_x x + k_z z - \text{Re}(\omega)t) + \text{Im}(\omega)t] \\ &= \underbrace{\exp[i(k_x x + k_z z - \text{Re}(\omega)t)]}_{\text{振幅 1 で振動}} \cdot \underbrace{\exp[\text{Im}(\omega)t]}_{\text{符号に応じて増加または減少}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

のように書けるので, もし $\text{Im}(\omega) > 0$ ならばこの形の擾乱は不安定であること