第 6 章　成層流体の力学

これまでの章で流体の運動を考える時には，外力の影響についてはほとんど気にしてこなかった．(4.3) で示されたように，重力のようなポテンシャル力は圧力の中に取り込むことができ，意識して取り扱う必要がなかったのである．しかし，その導出には密度 ρ が一定であるという仮定を用いていた．密度が一様でない時には，ポテンシャル力と言えども，単純に圧力の中に取り込んでしまえばよいというわけにはいかず，重力のような外力は流体の運動に影響を及ぼすことになる[†]．

重力場中にある流体の密度に不均一があったとしよう．密度が大きな部分は密度が小さい部分に比べてより強く重力を受けて下方に変位しようとするため，一般に重力場にある流体は，下方ほど密度が大きくなる傾向にある．風呂を沸かす時に，上は熱い（したがって軽い）お湯になっても，下は冷たい（つまり重い）水のままであるというのはその一例である．このように水が上ほど熱く（軽く）なっている状態というのは安定であり，無理にそれをひっくり返そうとすると大きなエネルギーが必要であることは，上部だけが沸いた風呂の例で多くの人が体験しているであろう．自然には（局所的・一時的にではあるが）下方の流体が軽くなる場合もあるが，このような逆の場合も含めて，流体の密度が主として重力の方向 (z 方向) に変化している状態を**成層** (stratification) という．大気や海洋は重力という外力を受けているので，この成層の効果は，次の章で考えることになる地球の自転の効果とともに，大気や海洋の運動を考える上で重要な役割を果たすことになる．

† 自由表面というのは密度変化の極端な場合と考えることもでき，自由表面をもつ流体は重力の影響を受ける．実際，第 3 章で扱った波では，重力による復原力が本質的な役割を果たしており，第 3 章だけは重力の影響について考察をしていた．ただし，第 3 章で扱った流体は密度一様であったから，重力の影響は運動方程式には入っておらず，自由表面での境界条件として取り入れられていたのである．

6.1 静水圧平衡

流体が重力場の中にあることの影響は，その圧力分布に顕著に現れる．静止した流体中で δz だけ離れて上下に並んで位置する 2 点 A と B の圧力を比べてみよう．下の点 B における圧力 p_{B} は，上の点 A での圧力 p_{A} に AB 間に存在する流体柱に働く重力が加わったものに等しくなるので ($p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}} + \rho g\,\delta z$)，流体中での圧力は下に行くほど高くなるのである．この関係は，ナヴィエ - ストークス方程式の鉛直成分で $\boldsymbol{u} = 0$ とすることによって

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{6.1}$$

として得られるもので，この (6.1) の関係の成り立つ状態を**静水圧平衡** (hydrostatic balance)，この関係式にしたがって密度から決まる圧力を**静水圧** (hydrostatic pressure) いう．静水圧の関係式は，厳密には静止している流体中で成り立つ関係であるが，流体が多少運動していたとしても，慣性項や粘性項が圧力項や重力加速度項に比べて十分小さければ，近似的にこの関係が成り立つ．実際，大気や海洋の大規模な現象においては，非常に良い精度で静水圧の関係が成立している．

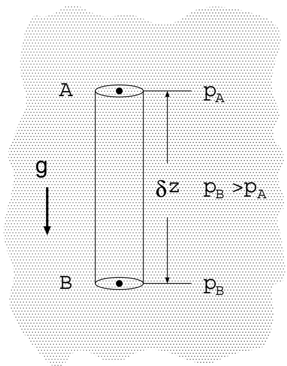

図 6.1 静水圧

演習 6.1

(6.1) だけでは p と ρ の鉛直分布はわからないが，p と ρ の関係（状態方程式）が与えられると，これらの鉛直分布が求められる．

(1) $\rho = \mathrm{const}$ の場合の $p(z)$ を求めよ．水圧が海面より 100 気圧 高くなるのは海面下何 m の地点か．(1 気圧 $\cong 1,000$ hPa と考えよ．)

(2) 状態方程式 $p = \rho RT$ が成り立つ等温の理想気体の圧力は $p(z) = \exp(-z/H)$ になることを示し， H を T, R, g で表せ．この H を**スケールハイト** (scale height) という．空気の場合， $R = 2.9 \times 10^2$ J kg^{-1}K^{-1}，温度を $T = 270$ K とすると大気のスケールハイトはいくらか．

6.2 静力学的安定性

ナヴィエ - ストークス方程式の水平成分で $\boldsymbol{u}=0$ とすると

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{6.2}$$

となることから，重力場中で静止している流体の圧力は水平方向には一定で，鉛直座標 z のみの関数になっていることがわかる．静止している流体では，同時に静水圧の関係 (6.1) も成り立つから，ρ およびその他の熱力学量も z のみの関数になっていることになる．現実の大気や海洋は静止しているわけではないが，温度や密度などの熱力学量は，主として鉛直座標 z で決まっており，基本的には成層流体として考えることができる．

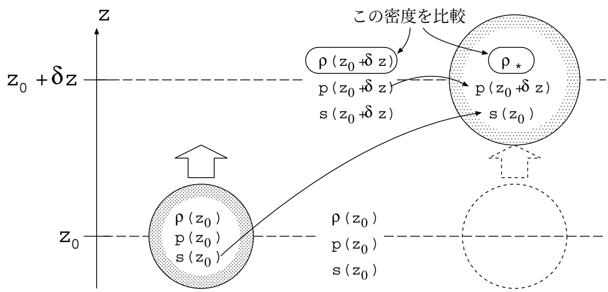

図 6.2 パーセル法

さて，熱力学量が主に鉛直方向に変化する成層流体には，(水の層の上にお湯がのっている状態のように）多少ゆらしてもそのままの状態であり続ける安定な状態もあれば，逆に（お湯の層の上に水がのっている状態のように）ほんの少し動かしただけでも流体層全体がひっくり返るような不安定な状態もあり得る．この節では，ある流体層がこのどちらの状態にあるのかを，次のようような方法で調べてみることにしよう．密度，圧力，エントロピーなどの熱力学量の分布が，鉛直座標 z のみの関数 $\rho(z), p(z), S(z)$ になっている流体があり，流体の状態方程式が $\rho=f(p,S)$ と書けるものとする．高さ $z=z_0$ にあるこの流体の小さな塊を δz だけ持ち上げてみよう．この鉛直方向の変位は断熱的に起こるものとし，また，圧力は流体塊がある場所の回りの流体の圧力にすみやか

に調節されるものとする．本来は，流体塊を動かすと回りの流体の圧力などの量も変化してしまうはずなのであるが，ここではその影響を小さいものとして無視するのである．このような方法は**パーセル法** (parcel method) と呼ばれている．

これらの仮定によって，δz だけ持ち上げられた流体塊の圧力は $p(z_0{+}\delta z)$ となるが，エントロピーの方は $S(z_0)$ のままなので，密度は $\rho_* = f\big(p(z_0{+}\delta z), S(z_0)\big)$ となる．δz が十分小さいとすると，

$$\begin{aligned} \rho_* &= f\big(p(z_0+\delta z), S(z_0)\big) \\ &\sim f\big(p(z_0), S(z_0)\big) + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dz}\,\delta z \\ &= \rho(z_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dz}\,\delta z \end{aligned} \tag{6.3}$$

と近似される．一方，その場所の周囲の流体の密度は

$$\begin{aligned} \rho(z_0+\delta z) &= f\big(p(z_0+\delta z), S(z_0+\delta z)\big) \\ &\sim f\big(p(z_0), S(z_0)\big) + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dz}\,\delta z + \frac{\partial f}{\partial S}\frac{dS}{dz}\,\delta z \\ &= \rho(z_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dz}\,\delta z + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dz}\,\delta z \end{aligned} \tag{6.4}$$

となっているので，この持ち上げた流体塊はまわりの流体より密度が

$$\begin{aligned} \rho_* - \rho(z_0+\delta z) &= -\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dz}\,\delta z \\ &= -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{dS}{dz}\,\delta z = \frac{T\alpha\rho}{c_p}\frac{dS}{dz}\,\delta z \end{aligned} \tag{6.5}$$

だけ大きくなっている．ここで， c_p, α はそれぞれ定圧比熱 $c_p \equiv T(\partial S/\partial T)_p$ および熱膨張率 $\alpha \equiv -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$ であるが，一般的には物質の c_p や α は正であるため，もし $dS/dz > 0$ であれば，持ち上げた流体塊の密度がまわりの流体の密度よりより大きくなることを (6.5) は示している．$dS/dz > 0$ の場合，持ち上げられてまわりの流体より密度が重くなった流体塊は，重力を受けて下方に加速されるが，元の位置より下にいくと，今度は逆にまわりの流体より密度が小さくなって浮力を受けて再び上昇し，**ブラント - ヴァイサラ振動** (Brunt-Väisälä oscillation) と呼ばれる振動を行うことになる．このブラント - ヴァイサラ振動の周期を求めてみよう．流体塊の運動方程式は

$$\rho \frac{d^2}{dt^2}\delta z = -\left[\,\rho_* - \rho(z_0+\delta z)\,\right]g = -\frac{T\alpha\rho g}{c_p}\frac{dS}{dz}\,\delta z \tag{6.6}$$

となるからこの振動の角振動数 N は

$$N^2 = \frac{T\alpha g}{c_p}\frac{dS}{dz} \tag{6.7}$$

となり，周期は $2\pi/N$ で計算される．この N を**ブラント - ヴァイサラ振動数** (Brunt-Väisälä frequency) という．音速 c_s の定義式 $c_s^2 \equiv (\partial p/\partial\rho)_S$ を用いて

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S dp = -\frac{T\alpha\rho}{c_p}dS + \frac{1}{c_s^2}\,dp \tag{6.8}$$

だから，(6.8) と静水圧の式 (6.1) より

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{T\alpha\rho}{c_p}\frac{dS}{dz} + \frac{1}{c_s^2}\frac{dp}{dz} = -\frac{T\alpha\rho}{c_p}\frac{dS}{dz} - \frac{\rho g}{c_s^2} \tag{6.9}$$

の関係が導かれる．この式を用いることによって，ブラント - ヴァイサラ振動数は

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2} \tag{6.10}$$

とも表現できる．

以上では $dS/dz > 0$，したがって $N^2 > 0$ である場合を考察してきたが，この場合には流体塊を少し持ち上げても下降し，逆に少し下げても上昇して，元の位置に戻ろうとする．このような流体を**静力学的に安定** (statically stable) であるという．逆に流体が $dS/dz < 0$ の状態にあって $N^2 < 0$ 時には，小さな流体塊を少し持ち上げると，その流体塊の密度はまわりの流体よりも密度が小さくなり，浮力を受けてますます上昇を続けることになる．このような状態にある流体を**静力学的に不安定** (statically unstable) であるという．例えば，対流運動は静力学的に不安定な流体中で起こる流体現象の代表例である．

[Note - 6.1]

気象学では，エントロピーの代わりに**温位** (potential temperature) と呼ばれる量を用い