

第7章 回転流体の力学

これまでの章で、基礎方程式から波動や乱流、さらに成層流体まで、幅広く流体力学の基礎を学んできた。しかし、本書が最終的に対象とする「地球流体」では、これら一般の流体力学的な取り扱いに加え、「回転」の効果が重要となってくる。「回転の効果」とは、地球のように回転している系から、系内の流体を記述する際に新たに導入される、非回転系には無い取り扱いのことである。これは、「回転している系の観測者から、系とともに回転している流体を記述する」という条件のもとで基礎方程式を変形させることで導かれる。

この章では、まず 7.1 節で、第 1 章の基礎方程式を変形して回転流体に対する基礎方程式を導出し、続く 7.2 節では、地球流体力学でよく取り扱われる近似を導入して式を簡略化する。さらに、こうして得られた基礎方程式の解として定常解や波動解を考え、これらの解が地球流体のどのような現象に対応しているかを 7.3~7.6 節の 4 つの節で解説する。最後の 7.7 節では、さらに成層の効果加わる場合について考慮して、現実の気候変動や大循環を扱う第 8 章への橋渡しとする。

7.1 回転系での基礎方程式

第 6 章までは、静止した系にいる観測者が、系内の流体を記述するための基礎方程式を取り扱ってきた。しかし、地球上の流体のように回転している流体を扱う場合には、静止系の固定座標系 (fixed coordinate frame) を使って運動を記述するのは明らかに手間である。それよりは、流体とともに回転する座標系 (rotating coordinate frame) を定義し、あたかも流体の回転がないかのように取り扱う方が簡単である。この節では、このように「流体と同じ回転をしている座標系から、あたかも回転していないように見える流体を記述する場合」に、静止系の場合の流体の基礎方程式がどう変形されるかを見る。

7.1.1 固定座標系から回転座標系への変換

静止系に固定した座標系から見て、角速度 Ω で回転しているベクトル A を考える (図 7.1)。この場合、時刻が t から $t + \delta t$ に変化すると、 $A(t)$ は、大きさを変えずに方向のみが変化して $A(t + \delta t)$ となったように見える。図 7.1 のように、これらの端点を共に含み Ω に直交する平面内の円弧 \tilde{A} を考えると、円弧 \tilde{A} の内角は $\delta\theta = |\Omega|\delta t$ となり、また半径は、 Ω と A が成す角 γ を使って、 $|A|\sin\gamma$ と書くことができる。このとき、円弧 \tilde{A} の長さは $\delta\theta|A|\sin\gamma$ となる。

もし δt が十分小さければ、この円弧 \tilde{A} はベクトル $\delta A \equiv A(t + \delta t) - A(t)$ に近づく。つまり、 δA は A にも Ω にも直交し、大きさが $|\delta A| \simeq \delta t |\Omega| |A| \sin\gamma$ となる。 δt を極小にして微分を求めると

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_F = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta A}{\delta t} = \Omega \times A \quad (7.1)$$

と書くことができる[†]。

一方、ベクトル A と同じ Ω で回転している座標系上の観測者が A を見たとすると、この観測者からは A が回転していることは認識されず、 A は静止しているように見えるはずである。すなわち、

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_R = 0 \quad (7.2)$$

が成り立ち[‡]、静止系の固定座標系で記述するよりも簡単に時間微分が記述される。

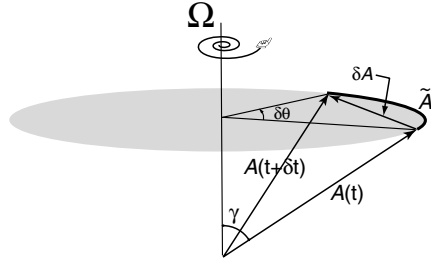


図 7.1 固定座標系から見て Ω で回転するベクトル A 。 δt の時間に、 δA だけ変化する。 δt が小さければ、 δA は Ω にも A にも直交しており、 $\Omega \times A$ と書ける。

[†] 添え字 F は「Fixed frame で見た」という意味。

[‡] 添え字 R は「Rotating frame で見た」という意味。

念のため、より一般的に、回転する系から見ても A の変化が観測される場合も考えておこう。実はこの場合でも、ベクトルが線型に分離できることから、回転座標系から見た変動部分 $(\partial A/\partial t)_R$ と図 7.1 の $A + \delta A$ を足し合わせて考えればよい。つまり、

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times A \quad (7.3)$$

の関係が、任意のベクトル A について成立する。

すなわち、静止系の固定座標系と、 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する座標系とでは、時間微分に $\boldsymbol{\Omega} \times A$ だけの差を生じることが分かる。

7.1.2 回転座標系における速度と加速度

回転座標系と固定座標系の関係式 (7.3) を用いて、回転座標系での流体の運動方程式が固定座標系とどう異なるかを、具体的に考えよう。

まず、位置ベクトル r の時間微分は

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times r \quad (7.4)$$

となる。これはすなわち、それぞれの座標系で観測する速度 \mathbf{u}_F と \mathbf{u}_R に

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times r \quad (7.5)$$

の関係があることを示している。

加速度、すなわち速度の時間微分は

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_F \quad (7.6)$$

と書ける。ただし、この右辺では添え字の R と F が混在している。回転系から静止系の流速 \mathbf{u}_F を認識できないので、右辺は \mathbf{u}_R のみで書かなくてはならない。そこで、さらに (7.5) を代入すると、

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_R}{\partial t}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times r) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}\right)_R \times r \quad (7.7)$$

となる。右辺第 2 項をコリオリ加速度 (Coriolis acceleration) 項、第 3 項を向心加速度 (centripetal acceleration) 項と呼ぶ。なお、これらの加速度項を運動方

程式の中で移項して外力として扱う場合には、それぞれコリオリ力 (Coriolis force) と遠心力 (centrifugal force) と呼ばれる[†]。

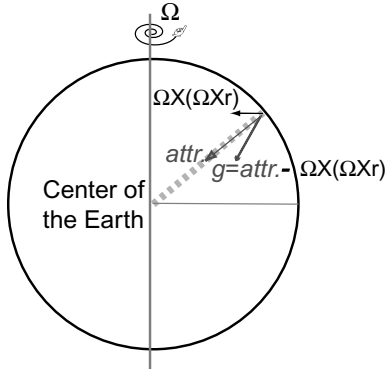


図 7.2 地球の引力 ($attr.$) と、自転による遠心力 $-\Omega \times (\Omega \times r)$ を含めた重力 (g)。ただし、この図は遠心力を誇張して書いてあり、実際は圧倒的に引力の方が大きく、「重力の方向」すなわち「鉛直下向き」は、ほぼ地球の中心方向を向いている。

通常の地球流体力学では、地球の自転角速度が急速に変化しない場合を対象としているので、(7.7) の右辺最終項は無視される。また、右辺第 3 項は地球の自転による遠心力に相当するが、これは地球の引力 (attractive force) と一緒に重力 (gravity force) に含めることが多い (図 7.2)。結局、回転座標系と固定座標変換には、(7.7) の右辺第 2 項のコリオリ加速度項が最も重要となる。

7.1.3 回転系における基礎方程式

ナビエ ストークス方程式

以上を考慮して、回転系でナビエ ストークス方程式を書いてみる。すなわち、固定系の第 1 章のナビエ ストークス方程式 (1.89) を、回転系で見た u_R で記述する。

回転座標系と固定座標系は、時間を固定してしまうと、単に座標系を回転させただけになる。したがって、ある瞬間における空間微分は、ベクトル表示では同じになる。このため、(1.89) の回転系への変形とは、(7.7) のコリオリ加速度項の追加と、(7.5) による u_F と u_R の変換を考えればよいことになる。ところが、(7.5) に出てきた $\Omega \times r$ ベクトルは $\nabla \cdot$ や ∇^2 を施すと消えてしまう。結局のところ、回転系でのナビエ ストークス方程式とは、静止系で見えてきた

[†] ただし本章では、「コリオリ加速度」と「コリオリ力」は、ほぼ同義的に使われている。

方程式にコリオリ加速度項が加わっただけの

$$\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}_R + \frac{\mu}{3\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_R) \quad (7.8)$$

の形式で書ける。ただし、この式における物質微分は「固定座標系のオイラー場」ではなく、「回転座標系のオイラー場」に戻すように

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_R + \mathbf{u}_R \cdot \nabla \quad (7.9)$$

で定義されている。

[Note-7.1]

文中で「ある瞬間における空間微分は、ベクトル表示すると固定座標系と回転座標系で同じになる」と述べたが、両者の座標軸の方向は回転しているので、ベクトルを各成分で表示すると大きく異なる。固定座標系から回転する流体を記述するのが煩雑になるのは、この成分表示が時とともに変化してゆくためである。

また、外力 \mathbf{K} は、固定座標系でも回転座標系でもベクトル表示は等しくなるが、関数表現そのものは変わる可能性がある。例えば、外力 \mathbf{K} が固定座標系で \mathbf{u}_F の関数で書かれるとき、 \mathbf{u}_R で表現すると別の関数形になる場合が多い。

連続の方程式

次に、もう一つの流体の基礎方程式である連続の方程式についても考えておこう。スカラーの時間微分は回転座標系でも固定座標系と同じ形式になるので、第1章の連続の方程式 (1.38) を回転系に変換しても

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}_R = 0 \quad (7.10)$$

となり、結局のところ回転系でも形式はまったく同じになる。非圧縮性流体の場合でも当然この関係は成立するので、

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_R = 0 \quad (7.11)$$

は系の回転にかかわらず成立している。

渦度方程式

渦度方程式は、ナビエ-ストークス方程式の変形であるから、回転系でも