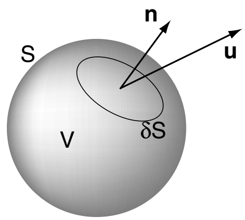

図 1.11 空間に固定された閉じた領域

を V とする．任意の時刻において，V 内の流体の質量は

$$\iiint_V \rho\, dV$$

である．したがって，V 内の流体の単位時間当たりの質量の増加は

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

で与えられる．一方，S を通って単位時間当たりに V から流出する流体の質量は，微小な面要素 δS を通って単位時間当たりに流出する質量 $\rho\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\delta S$ を S 全体で加え合わせて

$$\iint_S \rho\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$$

である．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．流体が新たに発生したり消滅したりしない限り，V 内の流体質量の増加は境界面 S を通って流体質量が流入した結果であるから

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\iint_S \rho\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, dS \tag{1.35}$$

が成り立つ．ここで，ガウス (Gauss) の定理（[**Note-1.4**] 参照）を用いて右辺を体積積分に変換して，移項すれば

$$\iiint_V \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})\right\} dV = 0 \tag{1.36}$$

を得る．これが任意の領域 V に対して成り立つためには

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{1.37}$$

が成り立たなければならない．これが質量保存則の１つの表現で**連続の方程式** (equation of continuity) と呼ばれる†．また，

† 連続式とか連続の式と呼ばれることもある．