した (3.32)，あるいは (3.24) を**分散関係** (dispersion relation) という．

(3.24) から k を陽な形で求めることは一般にはできないが，$y = \tanh kh$ は単純増加の関数であるので，(3.24) を満たす k は，図3.2 のように必ず 1 点求まる．（これを $k = k_0$ と表す．）水深が無限大 $(h \to \infty)$ の時には $\tanh kh \to 1$ となるので $k_0 = K$ である．すなわち有限水深の波では必ず $K < k_0$ であるから，水深が浅くなれば，波長は無限水深での値よりもだんだん短くなる．

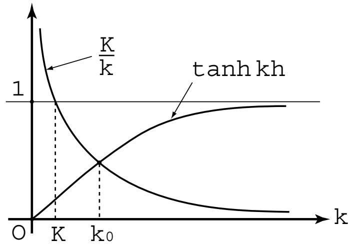

図 3.2 有限水深での波数 k_0 は無限水深の値 K よりも大きい．

(3.32) で水深が無限大の場合 $(h \to \infty)$，および浅い場合 $(h \to 0)$ の極限を考えると

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \qquad (\, h \to \infty \,), \tag{3.33}$$

$$c = \sqrt{gh} \qquad (\, h \to 0 \,) \tag{3.34}$$

となる．したがって，浅水波（あるいは $h/\lambda \to 0$ の場合であるから長波ともいう）の場合には，位相速度は波長に関係しなくなるので，波はもはや分散性ではないことがわかる．また (3.33) が正しいのは，十分な精度で $\tanh kh \sim 1$ と近似できる場合であるが，これは $kh = 2\pi h/\lambda \geq 2.65$，すなわち $\lambda \leq 2.4h$ で 1.0% 以内の誤差で成り立っている．したがって実質的には，水深が半波長以上あれば水深無限大として取り扱っても大きな誤差は生じないことになる．

3.3 水粒子の軌道，質量輸送

波による水粒子の軌道を求めてみよう．この場合，ある特定の流体粒子の動きを追跡することになるので，ラグランジュ的に考えなければならない．そこで水粒子の位置を $\boldsymbol{r}_0(t) = (\, x_0(t), z_0(t) \,)$ と表すと

$$\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} = \boldsymbol{u}(\, \boldsymbol{r}_0,\, t \,) \tag{3.35}$$