

つまり

$$2\eta(\ddot{u}_\phi - C_1) + \frac{d}{d\eta}(\ddot{u}_\phi - C_1) = 0. \quad (4.66)$$

さらにもう一度積分して

$$\ddot{u}_\phi - C_1 = C_2 \exp(-\eta^2) \quad (4.67)$$

となるが、初期条件、境界条件 (4.65) から積分定数を決めると $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ となるので、結局 u_ϕ は

$$u_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (4.68)$$

と求められる。

この解の軸から十分に離れた場所と軸付近での近似形を調べよう。まず遠くでは、 $\exp(-r^2/4\nu t)$ の項が十分に小さくなるので無視できて

$$u_\phi \sim \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \text{for } r \gg 2\sqrt{\nu t} \quad (4.69)$$

になるが、これは、軸から十分に遠く離れたところでは粘性の影響がまだ及んでおらず、元の渦糸の速度分布を保ったままになっていることを示している。逆に、軸の近くでは $\exp x \sim 1 + x$ (for $x \ll 1$) を用いて

$$u_\phi \sim \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} r \quad \text{for } r \ll 2\sqrt{\nu t} \quad (4.70)$$

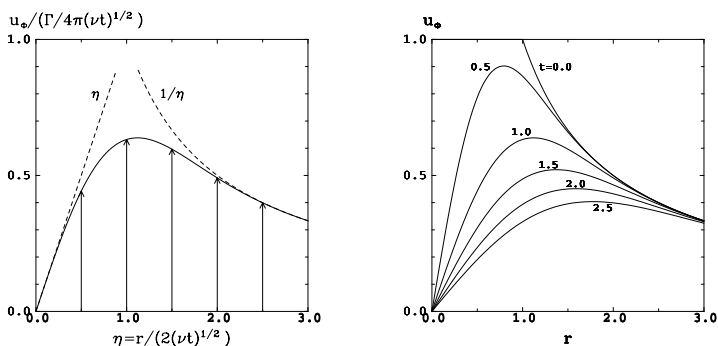


図 4.11 減衰渦の流れの u_ϕ の分布: 無次元化したグラフ (左図) と $\Gamma = 2\pi$, $\nu = 0.25$ の場合の時間変化の様子 (右図)