$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)}_{3U\cos\theta\frac{a^3}{r^5}} + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)}_{-2U\cos\theta\frac{1}{r^2}(1-\frac{3a}{2r}+\frac{a^3}{2r^3})} \\
&\qquad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\underbrace{\frac{\partial^2 u_r}{\partial\phi^2}}_{0} - \frac{2u_r}{r^2} \underbrace{- \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta)}_{-4U\cos\theta\frac{1}{r^2}(-1+\frac{3a}{4r}+\frac{a^3}{4r^3})} \\
&= 3U\cos\theta\frac{a}{r^3}
\end{aligned}
\tag{4.92}
$$

となるので，(4.91) の r 成分は

$$
\frac{\partial p}{\partial r} = 3\rho\nu U\cos\theta\frac{a}{r^3} \tag{4.93}
$$

であり，この両辺を無限遠から r まで積分することによって，p は

$$
p = p_\infty - \frac{3\mu a U}{2r^2}\cos\theta \tag{4.94}
$$

と求められる．ただし p_∞ は $r \to \infty$ における圧力である．

変形速度 $e_{r\theta}$（極座標での表現は付録 A.2 (3) 球座標 (r, θ, ϕ) の変形速度テンソルを参照）は，(4.89) と (4.90) を用いて

$$
e_{r\theta} = \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}}_{-U\sin\theta(1-\frac{3a}{2r}+\frac{a^3}{2r^3})} + \underbrace{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)}_{U\sin\theta(\frac{1}{r^2}-\frac{3a}{2r^3}-\frac{a^3}{r^5})}\Bigg] = -\frac{3}{4}U\sin\theta\frac{a^3}{r^4} \tag{4.95}
$$

となるので，剪断応力 $\tau_{r\theta}$ は

$$
\tau_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta} = -\frac{3}{2}\frac{U\mu\sin\theta}{r}\frac{a^3}{r^3} \tag{4.96}
$$

で与えられる．

演習 4.4

球を過ぎるストークス流におけるひずみ速度テンソル $(e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{\phi\phi}, e_{r\theta}, e_{\theta\phi}, e_{\phi r})$ を求め，球面上に作用する剪断応力は $\tau_{r\theta}$ のみが 0 でないことを示せ．

球面上に作用する圧力と剪断応力を積分することにより，流れの方向に作用する全抗力 F_x は次のように求めることができる．