$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{u} \cdot \nabla \left[\int d\boldsymbol{k}'\ \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \exp\left(i\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} \right) \right] \exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{r} \left[\int d\boldsymbol{k}' \left(\boldsymbol{u} \cdot i\boldsymbol{k}' \right) \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \exp\left(i\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} \right) \right] \exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right) \\
&= \int d\boldsymbol{k}'\, \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}')\ \ i\boldsymbol{k}' \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{u} \exp\left[i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r} \right] \right]}_{\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')} \\
&= i \int d\boldsymbol{k}'\, \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \left(\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \right)
\end{aligned}
$$

となるので，ナヴィエ - ストークス方程式の両辺をフーリエ変換したものは

$$
\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})}{\partial t} + i \int d\boldsymbol{k}'\, \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \left(\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \right) = -\frac{i}{\rho} \boldsymbol{k} \tilde{p} - \nu k^2 \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}). \qquad (5.69)
$$

(5.67) を用いて，この式からさらに $\tilde{p}$ を消去することができる．(5.69) と $\boldsymbol{k}$ の内積をとり，(5.67) を用いて $\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}$ を 0 におくと

$$
\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})}_{0} + i \int d\boldsymbol{k}' \left(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \right) \left(\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \right) = -\frac{i}{\rho} k^2 \tilde{p} - \nu k^2 \underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})}_{0}
$$

より

$$
-\frac{i}{\rho}\tilde{p} = \frac{i}{k^2} \int d\boldsymbol{k}' \left(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \right) \left(\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \right).
$$

この $\tilde{p}$ を (5.69) に代入して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})}{\partial t} + i \int d\boldsymbol{k}'\, \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \left(\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \right) \\
&\qquad = i \int d\boldsymbol{k}' \left(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \right) \left(\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \right) \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} - \nu k^2 \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}),
\end{aligned}
$$

つまり

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}) = -i \int d\boldsymbol{k}' \left(\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \right) \left[\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') - \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} \left(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}') \right) \right].
$$

さらに (5.67) で波数を $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$ とおくと

$$
\boldsymbol{k}' \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') = \boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')
$$