となるので，結局

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})=-i\int d\boldsymbol{k}'\,\big(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\big)\left[\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}')-\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\big(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}')\big)\right] \tag{5.70}$$

とまとめられる．この式は，波数 $\boldsymbol{k}$ の波は νk^2 に比例する粘性による減衰を受ける他に，波数 $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$ の波と波数 $\boldsymbol{k}'$ の波との相互作用で生じることを示している．

5.6.3 エネルギー方程式

次に単位体積あたりの（運動）エネルギーを記述する方程式を導こう．エネルギー E は $(1/2V)\int u^2\,d\boldsymbol{r}^\dagger$ で表されるが，これは $\boldsymbol{u}$ のフーリエ成分 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ によって

$$\begin{aligned}E\equiv\frac{1}{2V}\int u^2\,d\boldsymbol{r}&=\frac{1}{2V}\int d\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\left[\int d\boldsymbol{k}\,\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})\exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]\\&=\frac{1}{2V}\int d\boldsymbol{k}\,\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})\underbrace{\int d\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}_{(2\pi)^3\,\tilde{\boldsymbol{u}}(-\boldsymbol{k})}\\&=\frac{(2\pi)^3}{2V}\int d\boldsymbol{k}\,\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})\tilde{\boldsymbol{u}}(-\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

と表現される．ここで

$$E(\boldsymbol{k})\equiv\frac{(2\pi)^3}{2V}\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})\tilde{\boldsymbol{u}}(-\boldsymbol{k}) \tag{5.71}$$

とおくと

$$E=\int d\boldsymbol{k}\,E(\boldsymbol{k}) \tag{5.72}$$

であるから，$E(\boldsymbol{k})$ は波数 $\boldsymbol{k}$ の波に伴うエネルギーである**エネルギースペクトル** (energy spectrum) となる．

このエネルギーの時間変化を支配する方程式を導こう．(5.70) をテンソル表示で書くと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\tilde{u}_i(\boldsymbol{k})=-i\int d\boldsymbol{k}'\,k_m\tilde{u}_m(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\left(\tilde{u}_i(\boldsymbol{k}')-\frac{k_ik_l}{k^2}\tilde{u}_l(\boldsymbol{k}')\right). \tag{5.73}$$

---

† いまは無限に広がる領域を考えているため，本当は V も $\int u^2\,d\boldsymbol{r}$ も無限大になってしまう．したがって，厳密には有限の領域をとって $(1/2V)\int u^2\,d\boldsymbol{r}$ を定義し，その $V\to\infty$ の極限をとっていると考えるべきであろう．