(5.71), (5.72) と同様にして各波数に対するエンストロフィーを

$$Q(\boldsymbol{k}) \equiv \frac{(2\pi)^2}{2S}\tilde{\omega}(\boldsymbol{k})\tilde{\omega}(-\boldsymbol{k}) \tag{5.100}$$

と定義すると，

$$Q = \int d\boldsymbol{k}\, Q(\boldsymbol{k}) \tag{5.101}$$

となるが，$E(\boldsymbol{k})$ と $Q(\boldsymbol{k})$ の間には以下に示すような簡単な関係がある．

もともと渦度 ω は $\omega \equiv \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ と定義されていたから，そのフーリエ成分には

$$\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}) = i\left(k_x \tilde{v}(\boldsymbol{k}) - k_y \tilde{u}(\boldsymbol{k})\right) \tag{5.102}$$

の関係がある．したがって，

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(\boldsymbol{k})\tilde{\omega}(-\boldsymbol{k}) &= [k_x\tilde{v}(\boldsymbol{k}) - k_y\tilde{u}(\boldsymbol{k})]\,[k_x\tilde{v}(-\boldsymbol{k}) - k_y\tilde{u}(-\boldsymbol{k})] \\
&= \left(k_x^2 + k_y^2\right)[\tilde{u}(\boldsymbol{k})\tilde{u}(-\boldsymbol{k}) + \tilde{v}(\boldsymbol{k})\tilde{v}(-\boldsymbol{k})] \\
&\qquad - \underbrace{[k_x\tilde{u}(\boldsymbol{k}) + k_y\tilde{v}(\boldsymbol{k})]}_{0}\underbrace{[k_x\tilde{u}(-\boldsymbol{k}) + k_y\tilde{v}(-\boldsymbol{k})]}_{0} \\
&= \left(k_x^2 + k_y^2\right)[\tilde{u}(\boldsymbol{k})\tilde{u}(-\boldsymbol{k}) + \tilde{v}(\boldsymbol{k})\tilde{v}(-\boldsymbol{k})] \\
&= k^2 \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})\tilde{\boldsymbol{u}}(-\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{5.103}$$

となり（途中，フーリエ成分の連続の方程式 (5.67) を用いた），この式は

$$Q(\boldsymbol{k}) = k^2 E(\boldsymbol{k}) \tag{5.104}$$

という関係があることを示している．

2 次元流体においては，波数ごとには (5.104) のような関係のあるエンストロフィーとエネルギーが（粘性の効かない場合では）両方とも保存するという強い制約条件のため，3 次元乱流におけるようなエネルギーカスケードの描像は成り立たないのである．もしそのようなエネルギーカスケードが起きたと仮定しよう．エネルギーカスケードの過程では，エネルギーの波数間でのやりとりが本質的で粘性散逸は重要ではないから，エンストロフィーとエネルギーは保存するものとしてよい．ところが，低波数で注入されたエネルギーがそのま