7.1.1 固定座標系から回転座標系への変換

静止系に固定した座標系から見て，角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転しているベクトル $\boldsymbol{A}$ を考える (図 7.1)．この場合，時刻が t から $t+\delta t$ に変化すると，$\boldsymbol{A}(t)$ は，大きさを変えずに方向のみが変化して $\boldsymbol{A}(t+\delta t)$ となったように見える．図 7.1 のように，これらの端点を共に含み $\boldsymbol{\Omega}$ に直交する平面内の円弧 $\tilde{A}$ を考えると，円弧 $\tilde{A}$ の内角は $\delta\theta = |\boldsymbol{\Omega}|\delta t$ となり，また半径は，$\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{A}$ が成す角 γ を使って，$|\boldsymbol{A}|\sin\gamma$ と書くことができる．このとき，円弧 $\tilde{A}$ の長さは $\delta\theta|\boldsymbol{A}|\sin\gamma$ となる．

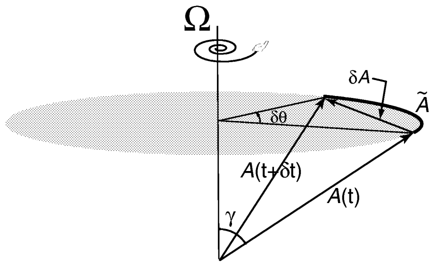

図 7.1 固定座標系から見て $\boldsymbol{\Omega}$ で回転するベクトル $\boldsymbol{A}$．δt の時間に，$\delta\boldsymbol{A}$ だけ変化する．δt が小さければ，$\delta\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{\Omega}$ にも $\boldsymbol{A}$ にも直交しており，$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}$ と書ける．

もし δt が十分小さければ，この円弧 $\tilde{A}$ はベクトル $\delta\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(t+\delta t) - \boldsymbol{A}(t)$ に近づく．つまり，$\delta\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ にも $\boldsymbol{\Omega}$ にも直交し，大きさが $|\delta\boldsymbol{A}| \simeq \delta t|\boldsymbol{\Omega}||\boldsymbol{A}|\sin\gamma$ となる．$\delta t \to 0$ として微分係数を求めると

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{F}} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\boldsymbol{A}}{\delta t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A} \tag{7.1}$$

と書くことができる[†]．

一方，ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ $\boldsymbol{\Omega}$ で回転している座標系上の観測者が $\boldsymbol{A}$ を見たとすると，この観測者からは $\boldsymbol{A}$ が回転していることは認識されず，$\boldsymbol{A}$ は静止しているように見えるはずである．すなわち，

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{R}} = 0 \tag{7.2}$$

が成り立ち[‡]，静止系の固定座標系で記述するよりも簡単に時間微分が記述される．

† $(d/dt)_{\mathrm{F}}$ は「Fixed frame で見たラグランジュ的記述の微分」の意味.

‡ $(d/dt)_{\mathrm{R}}$ は「Rotating frame で見たラグランジュ的記述の微分」の意味.