さて，任意の水平位置 (x_0, y_0) における流体の下端の位置を (x_0, y_0, z_0) とすると，そこでは $z_0 = -H(x_0, y_0, t)$ が成立している．流れにのった流体粒子が，位置 (x_0, y_0, z_0) の近くで流体の底面から離れないとすると，物質微分

$$\frac{D(z_0 + H)}{Dt} = 0 \tag{7.24}$$

が成立する．流体粒子の鉛直位置 z_0 の時間変化 Dz_0/Dt は，底面での鉛直速度 $w|_{-H}$ だから，(7.24) を変形して

$$w|_{-H} + \left.\frac{D_\mathrm{h} H}{Dt}\right|_{-H} = w|_{-H} + \frac{\partial H}{\partial t} + u|_{-H}\frac{\partial H}{\partial x} + v|_{-H}\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \tag{7.25}$$

が導かれる．例として，海洋の海底のように時間的な上下動がない場合を考えてみると，$\partial H/\partial t = 0$ より

$$\begin{aligned} w|_{-H} =& u|_{-H}\frac{\partial(-H)}{\partial x} \\ &+ v|_{-H}\frac{\partial(-H)}{\partial y} \end{aligned} \tag{7.26}$$

となり，底面での鉛直流は，水平流が底面の斜面を昇り降りすることで生じることを示している (図 7.4).

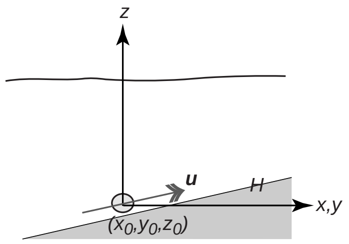

図 7.4　底面近くの位置 (x_0, y_0, z_0) での流体粒子の動き．底斜面を登る方向へ水平流が流れることによって，底面で上昇流が生じている．

同様に，流体の上端では $z_0 = \eta(x_0, y_0, t)$ が成立しており，

$$\frac{D(z_0 - \eta)}{Dt} = w|_\eta - \left.\frac{D_\mathrm{h}\eta}{Dt}\right|_\eta = 0 \tag{7.27}$$

となる．これらを (7.23) の $w|_\eta$ や $w|_{-H}$ に代入すれば，

$$\int_{-H}^{\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz + \left.\frac{D_\mathrm{h}\eta}{Dt}\right|_\eta + \left.\frac{D_\mathrm{h}H}{Dt}\right|_{-H} = 0 \tag{7.28}$$

のように，水平 2 次元流のみで閉じた連続の方程式が求まる．

さて，x 方向の鉛直積分流量 Q_x の x 微分は，積分範囲である η や H 自身も x の関数であることを考えると，

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-H}^{\eta} u\, dz\right) = \frac{\partial \eta}{\partial x}\, u|_\eta + \frac{\partial H}{\partial x}\, u|_{-H} + \int_{-H}^{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}\, dz \tag{7.29}$$