演習問題略解

第１章　流体力学の基礎方程式

[演習 1.1]　図 1.2 の記号を用いて，$2\delta S\boldsymbol{n} = \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} \times \overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OP_1}}) \times (\overrightarrow{\mathrm{OP_3}} - \overrightarrow{\mathrm{OP_1}}) = 2\delta S_1\boldsymbol{e}_1 + 2\delta S_2\boldsymbol{e}_2 + 2\delta S_3\boldsymbol{e}_3$ これと $\boldsymbol{e}_i$ との内積をとればよい．

[演習 1.2]　直断面積 δS の鉛直な水柱を考えて，それを水表面と深さ h のところで切った柱状体の力の釣り合いから $p = p_0 + \rho gh$.

[演習 1.3]　点 P を通る曲面上の任意の曲線 C を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ とすれば，$F(\boldsymbol{r}(t)) =$ 一定を満たす．これをパラメータ t で微分すれば，$\nabla F \cdot d\boldsymbol{r}/dt = 0$. $d\boldsymbol{r}/dt$ は点 P における C の接ベクトルだから，∇F は法線ベクトルである．

[演習 1.4]　省略．

[演習 1.5]　定常流では連続の方程式は $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$ となる．これを図 1.9 の流管の断面 S, S' と側面で囲まれた領域で積分し，これをガウスの定理で面積分に変える．そのとき，側面での積分は $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ なので積分に寄与しないから，$\iint_S \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{S'} \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$.

[演習 1.6]　流体が物体に及ぼす力は，物体の表面を S，それで囲まれる領域を V とすれば，$\boldsymbol{F} = -\iint_S p\boldsymbol{n}dS = -\iiint_V \nabla p dV$ である．$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{g}$ であるから，$\boldsymbol{F} = -\iiint_V \rho\boldsymbol{g}dV = -\boldsymbol{g}\rho V$.

[演習 1.7]　省略．

第２章　完全流体の力学

[演習 2.1]　$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega} + \nabla\left(q^2/2\right)$ によって (2.1) が得られる．次に (2.3) の右辺を変形すると，$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}) = u_i\partial_j\omega_j + \omega_j\partial_j u_i - \omega_i\partial_j u_j - u_j\partial_j\omega_i$.　ここで，$\partial_j\omega_j = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u}) = 0$ であり，また $\partial_j u_j$ は連続の式より $\partial_j u_j = -(1/\rho)(D\rho/Dt)$. これらを (2.3) に代入して整理すると，(2.4) が得られる．

[演習 2.2]　水面上では $p = p_0$ であり，流速は 0 と見なせるので，$p + \rho q^2/2 + \rho gz = p_0 + \rho gh$. 穴の位置では，$z = 0, p = p_0$ であるから，$q = \sqrt{2gh}$ となる．

[演習 2.3]　水面の高さが z の時の流速を v とすると，$v = \sqrt{2gz}$. 面積 a の小さな孔から dt 秒間に出る流量を dQ とすると，流量の保存から $dQ = avdt = -Adz$. したがって

$$dt = -\frac{A}{a}\frac{dz}{v} = -\frac{A}{a\sqrt{2g}}\frac{dz}{\sqrt{z}} \quad .$$

1) は，$z: H \to H/2$, 2) は，$z: H \to 0$ として積分すれば計算できる．

[演習 2.4]　$\partial\Phi/\partial x = 0$ に $r = a, x = -a$ を代入すると，$a = \sqrt{m/U}$ を得る．また無限下流での流量がわき出し量に等しいことから $4\pi m = U\pi b^2$. よって $b = 2\sqrt{m/U} = 2a$.

[演習 2.5]　速度ポテンシャルは，