$$\varPhi = Ux - \frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2}, \quad \left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(x \pm \ell)^2 + y^2 + z^2}$$

A, B 点は $x = \mp a$, $y = z = 0$ であるから，$\partial\varPhi/\partial x = 0$ より，$(a^2 - \ell^2)^2 - 4m\ell a/U = 0$ の解がよどみ点の座標を与える．また，ランキンの卵形内での，$y$ 軸上 $(x = 0)$ における流量が，$x = -\ell$ からのわき出し量 $(4\pi m)$ に等しいことから $b$ の関係式を求めると，$Ub^2\sqrt{b^2 + \ell^2} = 4m\ell$ を得る．最大流速も $x = 0$ で起こる．そこで $\partial\varPhi/\partial x$ の値に $R = b$ を代入して整理すると，次式を得る．

$$u_{max} = U\left\{1 + \frac{b^2}{2(\ell^2 + b^2)}\right\} \xrightarrow{\ell=0} \frac{3}{2}U \text{（球の場合）}$$

**[演習 2.6]**　ビオ - サバールの法則で，$\mathrm{P} = (h, 0, 0)$, $\boldsymbol{r} = (h, 0, -z)$, $\delta\boldsymbol{s} = dz\,\boldsymbol{k}$ を代入すると，$\delta u_y = (\varGamma/4\pi)hdz/(h^2 + z^2)^{3/2}$．これを $z$ について $-\infty \to +\infty$ まで積分すると，与式を得る．

**[演習 2.7]**　ビオ - サバールの法則で，$\mathrm{P} = (0, 0, z)$, $\boldsymbol{r} = (-R\cos\theta, -R\sin\theta, z)$, $\delta\boldsymbol{s} = (-R\sin\theta\, d\theta, R\cos\theta\, d\theta, 0)$ を代入すると，$\delta w = (\varGamma/4\pi)R^2\,d\theta/(R^2 + z^2)^{3/2}$．これを $\theta$ について $\theta \to 2\pi$ まで積分すると，$w = (\varGamma/2)R^2/(R^2 + z^2)^{3/2}$．一方，(2.77) で速度ポテンシャルを求めると，

$$\varPhi = \frac{\varGamma}{4\pi}\iint_S \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) R\,dR\,d\theta = -\frac{\varGamma}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} R\,dR\,.$$

この積分を行い，その結果から $w = \partial\varPhi/\partial z$ を計算すると，ビオ - サバールの法則から求めた結果と同じになることが確認できる．

**[演習 2.8]**　半無限物体では (2.58) より $\varPhi = Ux - m/r$ であったから，例えば流速についての関係式 $\partial\varPhi/\partial x = (1/y)\partial\varPsi_a/\partial y$ によって計算すると，

$$\varPsi_a = \frac{1}{2}Uy^2 - m\frac{x}{r} + \text{const}\,.$$

球の場合は，一様流が $x$ 軸の正方向の時，$\varPhi = Ux - \mu(\partial/\partial x)(1/r)$, $(\mu = Ua^3/2)$ であったから，半無限物体の結果から

$$\varPsi_a = \frac{1}{2}Uy^2 - \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \text{const}\,. = \frac{1}{2}Uy^2 - \mu\frac{y^2}{r^3} + \text{const}\,.$$

ランキンの卵型に対しては演習 2.5 より $\varPhi = Ux - m/r_1 + m/r_2$ であるから，

$$\varPsi_a = \frac{1}{2}Uy^2 - m\frac{x+\ell}{r_1} + m\frac{x-\ell}{r_2} + \text{const}\,.$$

**[演習 2.9]**　$y = 0$ に関する鏡像を考えればよいので，$f(z) = -Uz + m\log(z - ia) + m\log(z + ia)$．これから $df/dz$ を計算し，$z = x$ を代入することで $u$ が求まり，圧力は $p = p_0 - \rho u^2/2$ で与えられる．最低圧力は，最大流速となる位置で起こる．そこで $du/dx = 0$ より $x = \pm a$ を得るが，このうち $x = -a$ の方が $|u|$ の値が大きいので，圧力は $x = -a$ で最低となる．

**[演習 2.10]**　$y = 0$ に関する鏡像を考えると，循環の向きは反対であるから

$$f(z) = -Uz - \frac{i\varGamma}{2\pi}\log(z - ia) + \frac{i\varGamma}{2\pi}\log(z + ia)\,.$$

$\mathrm{P} = (0, a)$ での誘導速度は，P 点での渦糸以外による寄与を考えればよいので，

$$\frac{d}{dz}\left\{f(z) + \frac{i\varGamma}{2\pi}\log(z - ia)\right\} = 0 \xrightarrow{z=ia} \varGamma = 4\pi aU\,.$$