**[演習 4.4]** $\tau_{rr}=2\mu e_{rr}=2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}=2\mu U\cos\theta\Big(-\frac{3a^3}{2r^4}+\frac{3a}{2r^2}\Big)$ より $\tau_{rr}|_{r=a}=0$,
$\tau_{\theta\theta}=2\mu e_{\theta\theta}=2\mu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\Big]=2\mu U\cos\theta\Big(\frac{3a^3}{4r^4}-\frac{3a}{4r^2}\Big)$ より $\tau_{\theta\theta}|_{r=a}=0$,
$\tau_{\phi\phi}=2\mu e_{\phi\phi}=2\mu\Big[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta\cot\theta}{r}\Big]=2\mu U\cos\theta\Big(\frac{3a^3}{4r^4}-\frac{3a}{4r^2}\Big)$ より $\tau_{\theta\theta}|_{r=a}=0$,
(4.96) より $\tau_{r\theta}=-\frac{3}{2}\frac{U\mu\sin\theta}{r}\frac{a^3}{r^3}$ だから $\tau_{r\theta}|_{r=a}=-\frac{3}{2}\frac{U\mu\sin\theta}{a}$,
$\tau_{\theta\phi}=2\mu e_{\theta\phi}=2\mu\left[\frac{\sin\theta}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{u_\phi}{\sin\theta})+\frac{1}{2r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right]=0$ したがって $\tau_{\theta\phi}|_{r=a}=0$,
$\tau_{\phi r}=2\mu e_{\phi r}=2\mu\left[\frac{1}{2r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}+\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\phi}{r}\right)\right]=0$ したがって $\tau_{\phi r}|_{r=a}=0$.

**[演習 4.5]** $\frac{\partial X(\eta)}{\partial y}=\frac{dX(\eta)}{d\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=X'(\eta)\cdot\Big(\frac{U_0}{\nu x}\Big)^{1/2}$, $\frac{\partial X(\eta)}{\partial x}=\frac{dX(\eta)}{d\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=-X'(\eta)\frac{\eta}{2x}$
から導かれる
$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=(\nu xU_0)^{1/2}\frac{\partial f(\eta)}{\partial y}=U_0f'(\eta)$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(U_0f'(\eta)\right)=U_0\frac{\partial f'(\eta)}{\partial y}=\frac{U_0^{3/2}}{(\nu x)^{1/2}}f''(\eta)$
$\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{U_0^{3/2}}{(\nu x)^{1/2}}f''(\eta)\Big)=\frac{U_0^{3/2}}{(\nu x)^{1/2}}\frac{\partial f''(\eta)}{\partial y}=\frac{U_0^2}{\nu x}f'''(\eta)$
$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{d(\nu xU_0)^{1/2}}{dx}f(\eta)+(\nu xU_0)^{1/2}\frac{\partial f(\eta)}{\partial x}=\frac{(\nu U_0)^{1/2}}{2x^{1/2}}\left(f(\eta)-\eta f'(\eta)\right)$
$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U_0f'(\eta)\right)=U_0\frac{\partial f'(\eta)}{\partial x}=-U_0f''(\eta)\frac{\eta}{2x}$ などを代入すると (4.139) が得られる.

**[演習 4.6]** $\eta^m$ の係数が 0 になる条件から $A_{m+3}=-\frac{m!}{2}\sum_{k=0}^{m}\frac{A_{k+2}}{k!}\frac{A_{m-k}}{(m-k)!}(m\geq 0)$. ある $m+3$ ($m\geq 0$) を考えて, 仮に $0\leq k<m+3$ なる全ての $k$ について成り立ったとする. $m+3$ を 3 で割った余りが 1 または 0 ならば $k+2$ と $m-k$ のうちの少なくとも一方は 3 で割って 2 余る整数にはなり得ないから右辺の $A_{k+2}$ と $A_{m-k}$ の組合せの少なくともどちらか一方は 0 になる. したがって $m+3$ を 3 で割って余りが 1 または 0 ならば $A_{m+3}$ も 0 になる.
$m=2,5,8$ として $A_5=-\frac{2!}{2}\left(\frac{A_2}{0!}\frac{A_2}{2!}\right)=-\frac{1}{2}A_2^2$,
$A_8=-\frac{5!}{2}\left(\frac{A_2}{0!}\frac{A_5}{5!}+\frac{A_5}{3!}\frac{A_2}{2!}\right)=-\frac{1}{2}(1+10)A_2A_5=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times 11A_2^3$,
$A_{11}=-\frac{8!}{2}\left(\frac{A_2}{0!}\frac{A_8}{8!}+\frac{A_5}{3!}\frac{A_5}{5!}+\frac{A_8}{6!}\frac{A_2}{2!}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3(11+56+11\times 28)A_2^4=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times 375A_2^4$.

**[演習 4.7]** (1) 積分を $I_\delta\equiv\sum_{n=0}^{\infty}f'(n\delta\eta)\left(1-f'(n\delta\eta)\right)\delta\eta$ で近似する (ただし $\delta\eta=0.2$). $I_\delta=[f'(0.0)\times(1-f'(0.0))+f'(0.2)\times(1-f'(0.2))+\cdots\cdots\cdots]\times 0.2$
$\cong[0.0\times(1.0-0.0)+0.06641\times(1.0-0.06641)+\cdots+1.0\times(1.0-1.0)]\times 0.2$
$\cong 0.663$.
(2) $\int_0^\infty f'(1-f')d\eta=[f(1-f')]_0^\infty+\int_0^\infty ff''d\eta=-\int_0^\infty 2f'''d\eta=2f''(0)=2\alpha$.

## 第5章 乱 流

**[演習 5.1]** $\partial\boldsymbol{u}'/\partial x=ik_x\hat{\boldsymbol{u}}(y)\exp\left[i(k_xx+k_zz-\omega t)\right]$,
$\partial\boldsymbol{u}'/\partial z=ik_z\hat{\boldsymbol{u}}(y)\exp\left[i(k_xx+k_zz-\omega t)\right]$, $\partial\boldsymbol{u}'/\partial t=-i\omega\hat{\boldsymbol{u}}(y)\exp\left[i(k_xx+k_zz-\omega t)\right]$
などを使って方程式を各成分ごとに書くと

$$-i\omega\hat{u}+iUk_x\hat{u}+\hat{v}dU/dy=-(1/\rho)ik_x\hat{p}+\nu\left[d^2/dy^2-(k_x^2+k_z^2)\right]\hat{u}, \tag{1}$$
$$-i\omega\hat{v}+iUk_x\hat{v}=-(1/\rho)d\hat{p}/dy+\nu\left[d^2/dy^2-(k_x^2+k_z^2)\right]\hat{v}, \tag{2}$$
$$-i\omega\hat{w}+iUk_x\hat{w}=-(1/\rho)ik_z\hat{p}+\nu\left[d^2/dy^2-(k_x^2+k_z^2)\right]\hat{w}, \tag{3}$$
$$ik_x\hat{u}+d\hat{v}/dy+ik_z\hat{w}=0. \tag{4}$$

(1)$\times ik_x+$ (3)$\times ik_z$ の $(ik_x\hat{u}+ik_z\hat{w})$ を (4) 式を用いて消去すると