

を得る。U~Z に関して有意な解が存在するには行列式が 0 となればよいから、

$$-\frac{i\omega}{H} [f^2 - \omega^2 + gH(k^2 + l^2)] = 0$$

となる。波動解として $\omega \neq 0$ を考えれば、分散関係が導かれる。

[演習 7.9] 方程式から明らかに、 $u = A \sin f_0 t + B \cos f_0 t$ が一般解である (A, B は定数)。また、 $f_0 v = \partial u / \partial t$ より $v = -B \sin f_0 t + A \cos f_0 t$ となる。 $t = 0$ における初期値を代入すると $B = U_0, A = 0$ となるから、 $u = U_0 \cos f_0 t, v = -U_0 \sin f_0 t, \eta = 0$ となる。

また、 $u = \partial x / \partial t$ の関係から u, v を t で積分すると、原点にあった物質は $x = U_0 / f_0 \sin f_0 t, y = U_0 / f_0 (\cos f_0 t - 1)$ となり、半径 $|U_0 / f_0|$ の円軌道を取る。

[演習 7.10] 南半球では風に対するエクマン輸送の向きが北半球と逆なので、中央部はエクマン輸送の発散域となる。従って、そこでの内部領域の水柱は伸び、圧力は減る傾向にある。よって、渦位保存則からは、絶対渦度の絶対値が増える方向、すなわち $f_0 + \zeta \simeq f_0 < 0$ は、より強い負になる方向に変化することになる。

f 面では、相対渦度 ζ の減少、つまり時計回りの循環の強化を意味する。中央部の圧力は減っているが、南半球では圧力の低い方を右に見る方向に地衡流が流れるので、これは矛盾しない。

一方 β 面では、惑星渦度がより負になるように南下流が期待される。従って、北半球の場合と全く同様に、西岸強化された循環が形成される。

付 録

[演習 A.1] 対称性について証明する。(A.7) の第 2 式において、 l と m を入れ換え、次に i と j を入れ換える。さらに $T_{ji} = T_{ij}$ を用いると $T'_{ml} = \alpha_{im} \alpha_{jl} T_{ij} = \alpha_{jm} \alpha_{il} T_{ji} = \alpha_{il} \alpha_{jm} T_{ij} = T'_{lm}$ 。反対称性についても同様である。

[演習 A.2] T_{ijkl} は変換則 $T'_{pqrs} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \alpha_{ls} T_{ijkl}$ を満たしている。ここで、 $s = r$ において縮約し、(A.3) の第 1 式を用いると $T'_{pqrr} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \alpha_{lr} T_{ijkl} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \delta_{kl} T_{ijkl} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} T_{ijkk}$ 。これが示すべき関係であった。

[演習 A.3] 右辺の行列式において、まず行を (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の順になるように入れ換え、次に列を (p, q, r) が $(1, 2, 3)$ の順になるように入れ換えは

$$\text{右辺} = \epsilon_{ijk} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \text{左辺}.$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{iqr} = \delta_{jq} \delta_{kr} - \delta_{jr} \delta_{kq}, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijr} = 2\delta_{kr}, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6.$$