

多数の3波間共鳴組による弱乱流モデル：間欠性とベキ乗則

羽田 亨（九大総理工）

Abstract: Behavior of a nonlinear system (such as space plasma) is often discussed via evolution of eigenmodes of associated linearized system and nonlinear interactions among them. A minimum unit for representing such a nonlinear interaction is a triplet of eigenmodes, which satisfies the resonance condition. We have constructed a simple model of weak turbulence by multiply coupling such triplets. Numerical study shows that the system exhibits intermittency and long time evolution is controlled by self-organized criticality.

1. はじめに

宇宙プラズマ等、一般に興味ある物理系のほとんどは非線形系である。これらの物理系の長時間発展を議論する際、非線形の度合いがあまり大きくなければ、系のふるまいを非線形相互作用により影響を与え合う線形固有モードの発展として記述することができる。この際、相互作用の最小単位は共鳴条件を満たす3つの固有モードの結合（トリプレット）であるが、個々の振動の時間スケールと振幅（エンベロープ）の時間発展の時間スケールの分離ができる場合には、マンリー・ローエの関係を満たし積分可能な、振幅に対する3変数の発展方程式系が導かれる。

本稿ではこのようなトリプレットの組を複数連結させることにより、多くの固有モードが近隣相互作用を通じて時間発展する多自由度モデルを考え、その性質を数値的に議論した。これは、多くの波動がフーリエ空間で近隣モードとの非線形結合によりエネルギーのやりとりを行う、弱乱流の一つのモデル化であると言える。個々のモードの時間発展が間欠的であること、エネルギー分布が周波数に対するベキ乗則に収束すること（臨界自己組織化）など、少数自由度の場合とは著しく異なる多自由度系の振る舞いを紹介したい。

典型的な例として、アルヴェン波動の崩壊不安定性を考える。宇宙・天体の多くの領域、とくに太陽風中や磁気圏衝撃波の上流域などでは、非常に大振幅のアルヴェン波動が観測され、これが崩壊不安定性により、長波長へとカスケードしていく可能性が示唆されている。これを最初に理論的に取り扱ったのは、SagdeevとGaleev(1969)である。彼等は背景磁場に平行伝播する有限振幅アルヴェン波動(添字0)が、反対方向に伝播するアルヴェン波動(1)と音波(2)に崩壊することを示し、

それぞれの規格化された波動振幅を

$$C_0 = \frac{B_p}{4\Omega_0^{1/2}} \quad C_1 = \frac{b_1}{4\Omega_1^{1/2}} \quad C_2 = \frac{v_2}{\Omega_1^{1/2}\Omega_2^{1/2}} \quad (1)$$

とすると（分子はそれぞれの波動の磁場・速度成分、正確な変数の定義は文献を参照されたい）、これらが発展方程式

$$i\frac{\partial C_0}{\partial t} = V_{k_0, k_1, k_2} C_1 C_2^* \quad i\frac{\partial C_1}{\partial t} = V_{k_1, k_0, k_2} C_0 C_2 \quad i\frac{\partial C_2}{\partial t} = V_{k_2, k_0, k_1} C_0^* C_1 \quad (2)$$

に従うことを示した。ここに*は複素共役を表す。変数のスケーリングによりカップリング係数をおとすことにより、有名な3波方程式が得られる（以下の都合上、添字0,1,2を1,2,3と書き換えている）

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= iC_2^* C_3 \\ \dot{C}_2 &= iC_1^* C_3 \\ \dot{C}_3 &= iC_1 C_2 \end{aligned} \quad (3)$$

方程式系(3)は以下に述べるように、方程式の数と同数の保存量を持ち、可積分である。つまり、「量子の数」（作用）

$$N_j = |C_j|^2$$

に対して、

$$\begin{aligned} N_1 + N_3 &= \text{const} \\ N_1 - N_2 &= \text{const} \end{aligned} \quad (4)$$

の2つの Manley-Rowe の関係が成り立つこと、さらに積 $C_1 C_2 C_3^*$ の時間発展が実数であることから、

$$N_1 N_2 N_3 \cos \phi = \text{const} \quad (5)$$

が成り立つからである。ここに ϕ は各複素振幅の位相差である。

図1に Manley-Rowe の関係を示す。波動1の量子1個と波動2の量子1個が反応して波動3の量子1個を生じる、あるいは波動3の量子1個が波動1と波動2の量子それぞれ1個ずつに分裂する、というプロセスを考えれば、式(4)が自動的に

になりたつことがわかるであろう。

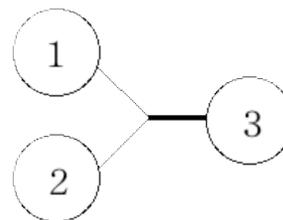


図 1。3波相互作用の模式図

先に述べたように方程式系(3)は可積分系であり、どのような初期条件であっても楕円関数を用いて解を書き下すことができるが、物理的には波動 1、2、3 の周波数の大小関係により、系の安定 (図 2 左) か不安定 (図 2 右) かの違いが生じる。これは系全体のエネルギー(= $\epsilon_1 N_1 + \epsilon_2 N_2 + \epsilon_3 N_3$) の保存から導きだされる結論である。

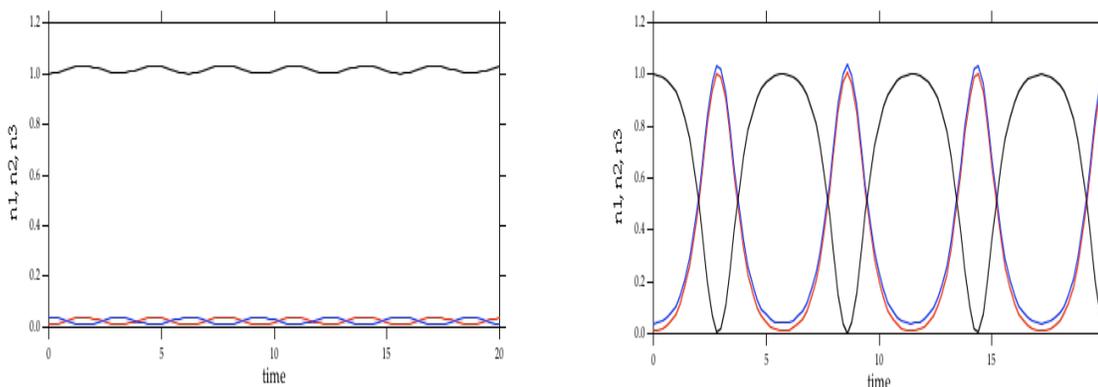


図 2。3波相互作用における、各波動モードの「量子数」の時間発展

2. 複数自由度系

先のアルヴェン波動の崩壊不安定性に対して、例えば計算機シミュレーションを行って長時間発展を調べると、もともとの親アルヴェン波動が崩壊して子アルヴェン波動を作るのみならず、新しく生まれた子アルヴェン波動がさらに崩壊して孫アルヴェン波動を作る、といったように、崩壊が連鎖的に起こることが観察される (例えば Terasawa et al)。そこで、先の3波組 (トリプレット) を連結して、多自由度の複合系をつくり、その時間発展を調べてみる。

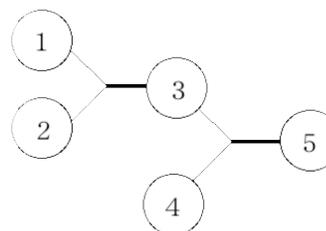


図 3。2組のトリプレットの連結

2組のトリプレットの連結には様々な方法が考えられるが、ここでは図3に示したモデルを考えた。図4は、これに適当な初期条件を与えて数値的に解を求めた結果である。黒く塗りつぶした部分（波動4）に注目すると明らかなように、もはや周期性は失われている。この系においても2組の Manley-Rowe の関係が成り立つが、変数の自由度が5であるのに対し、独立した保存量の数は2であるため、系は（一般には）積分不可能である。

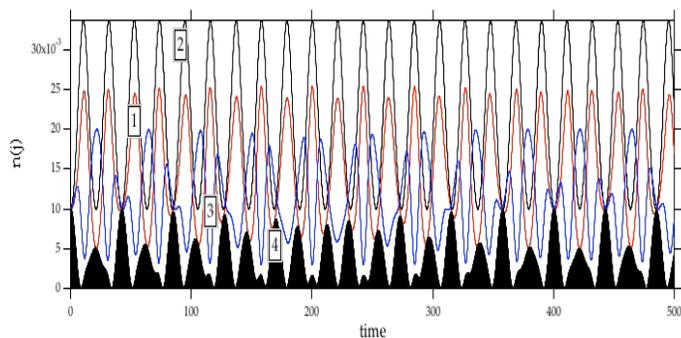


図4。2組のトリプレットを連結した系の時間発展

さらに多くのトリプレットの組を連結した系を考えよう。連結の方法として、以下の2種類を用いる。

(図5左) モデルA : N 個の波動モードに対して、 $(2j-1, 2j)$ と $(2j+1)$ を連結。

(図5右) モデルB : N 個の波動モードに対して、 $(j-1, j)$ と $(j+1)$ を連結。



図5。複数の波動モードの連結の方法

モデル A を使い、微小振幅の初期ノイズを各モードに与えて系の時間発展を見た結果を図6に示す。左はモード10の量子数の時間発展、右は十分に時間経過した後の、各モードの振幅を対数スケールで、モード番号に対してプロットしている。モード10の量子数には間欠的な振る舞いが見られる。しかし時間発展の結果、系に何らかの秩序が現れたかということ、その答えは否定的である。各モードの量子

数は、初期条件の近傍をそれぞれが揺らいでいるにすぎない。なお、奇数番目と偶数番目のモードは連結のジオメトリーが異なるので、グラフにもジグザグが現れている。

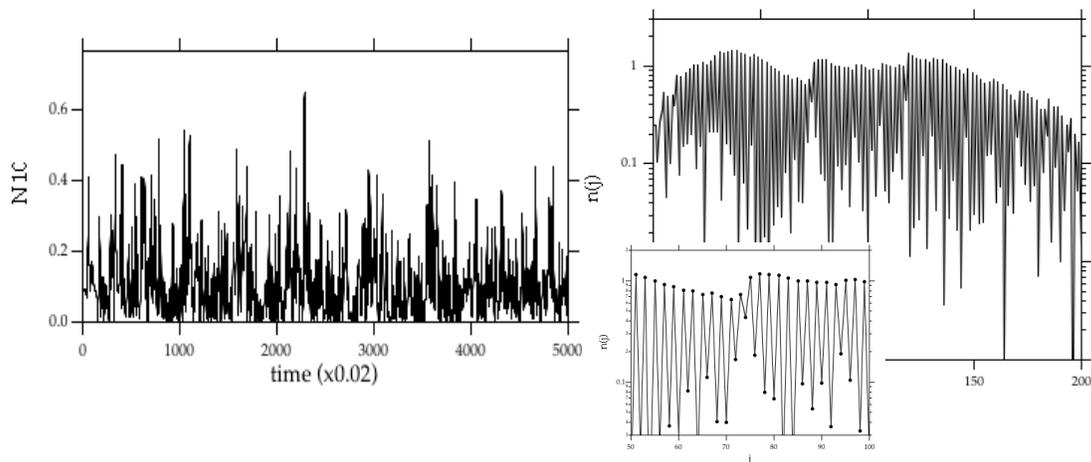


図6。モデル A における N_{10} の時間発展（左）と N_j の分布（右）およびその一部の拡大図。

次にモデル B を議論する。先の場合と同じ初期条件をあたえて系の時間発展を解いた結果が図7である。ここには N_2 、 N_{14} 、 N_{26} 、 N_{38} を示している。モード番号（サイト）により、時系列の様子が大きく異なる。さらに、モデル A の場合とは異なり、小さい番号のサイトでは量子数は増加し、逆に大きい番号のサイトでは量子数は減少する。つまり、時間の経過とともに、大きい番号のサイトから小さい番号のサイトに量子が流れていっていることがわかる。

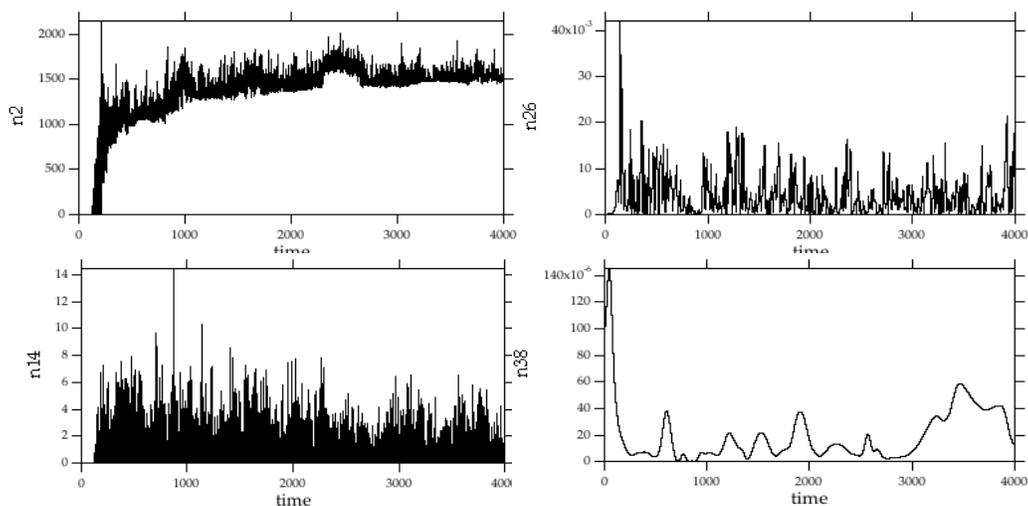


図7。モデル B の時間発展

図8に量子数の分布の時間発展を示す（十分時間が経過した状態が黒丸）。モデル B では波動モード間（サイト間）に共鳴条件、

$$\varphi_{j+1} + \varphi_j = \varphi_{j+1}$$

が全ての j について成り立っているため、 φ_j はフィボナッチ列をなし、ほぼ

$$\varphi_j \sim \frac{\varphi_1 + \sqrt{5} \varphi_2}{2}$$

である。このことを参照して分布を推定すると、最終状態では量子数の分布は、傾きが -1 のべき則に従っていることがわかる。

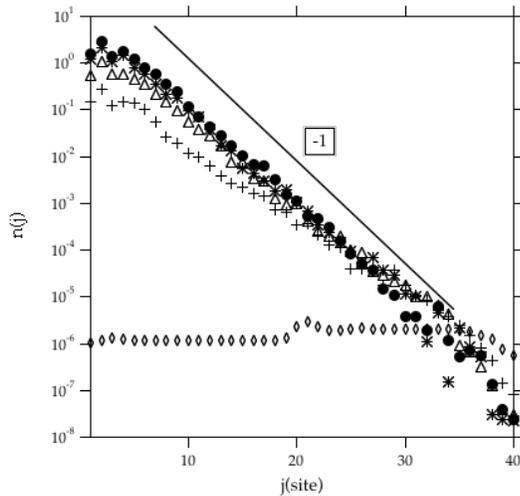


図8。モデル B における量子数の時間発展

3. まとめと考察

可積分である3波共鳴組（トリプレット）を複数個組み合わせることにより様々な多自由度系を構成し、その時間発展を数值的に議論した。サイト間の結合条件が十分でない場合（モデル A）、モード間の周波数関係が決まらず、長時間発展をしても秩序は形成されない。サイト間に十分な結合があり、モード間の周波数関係が一意的に決まると（モデル B）、系の長時間発展の結果として、量子数と波動の周波数との間にべき指数 $= -1$ のべき則があらわれた。これは、現在考えている系が閉鎖系であるため、サイト間でエネルギーの等分配が起きた結果である。サイト間の周波数関係が一意的には決まらないような結合、また開放系に対して、議論を発展させる必要がある。