

非線形孤立波の二次元的相互作用について

九大・応力研

辻 英一 (Hidekazu TSUJI)

九大・応力研

及川 正行 (Masayuki OIKAWA)

1 はじめに

プラズマや成層流体など様々な物理系の基礎方程式から導かれるソリトン方程式についてこれまで多くの研究がなされてきたが、それらは空間1次元を仮定して導かれた物が多く、表現できるソリトンの相互作用は1次元(1方向)の場合に限られる。実際の空間2次元系で、峰が直線的に伸びている1次元のソリトンが角度を持って相互作用する、すなわち進行方向が互いに異なる1次元のソリトンが同時に存在する場合、支配方程式は当然2次元性を持つものでなければいけないが、相互作用がきちんと解として書ける事は少ない。

進行方向の角度がある程度異なる場合には、摂動論を使って相互作用が調べられる場合がある(例えば、一層が深い二層流体についての研究 [1, 2] など)。しかしながら、孤立波がほとんど同じ方向に伝わる場合には摂動論が使えなくなる。この場合、主に伝わる方向に対して直交する方向への変化が低いオーダーになる(弱2次元的)と仮定をした時基礎方程式系から近似的に2次元の方程式が導出される場合がある。

そのような例として我々はこれまでに、二層流体中の波動を表す支配方程式である”Extended Kadomtsev-Petviashvili(EKP)” Equation [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + 6Pu \frac{\partial u}{\partial x} - 6Qu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (P > 0, Q > 0),$$

や”2-dimensional Benjamin-Ono (2dBO)” Equation [4]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \mathcal{H}[f(x)] \equiv \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx',$$

などを数値的に調べてきた。

今回我々は、負イオンを含むプラズマのある種の振る舞いを表す(弱2次元的)モデル方程式である”Modified KP (MKP)” Equation

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial u}{\partial T} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0, \quad (1)$$

を取り上げる¹。この方程式は、1次元性(Y方向の変化を無視)を仮定すると、ソリトン方程式として知られている Modified Korteweg-de Vries(MKdV) 方程式になり、また、非線形項が2次($u \partial u / \partial X$)ならばやはり可積分な Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式 [5] となる。KP 方程式ではソリトン解が解析的に求まり、相互作用する角度によって相互作用の性質が変わるといふソリトン共鳴現象が起こることがわかっている。KP 方程式と異なるタイプの非線形項を持つ MKP 方程式において上のような角度依存性があるかどうか注目しながら、1次元 MKdV ソリトンの2次元の相互作用を調べる。また、今までに調べた他の2次元方程式の結果との比較も試みる。

なお、今回対象とする MKdV ソリトン解は、特に正負両方の振幅を持ちうる事から、振幅の符号の異なる孤立波が相互作用する場合も合わせて考えられるという特徴がある。

¹ 3次の非線形項の符号は、EKP 方程式とは違い、正である。

2 定式化

MKP 方程式は、プラズマの基礎方程式から近似的に導出されるが、簡単にそれについて示す。空間 1 次元の場合の MKdV 方程式は Watanabe [6] によって導出された。2 次元方程式はその拡張として導出される。

基礎方程式は、正と負のイオンについての運動方程式と連続の式、電子のボルツマン方程式と静電ポテンシャルについての式である。

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = C_s \nabla \phi \quad \left(C_\alpha = -1, \quad C_\beta = \frac{1}{Q} \right),$$

$$n_e = \exp \phi, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = n_e + n_\beta - n_\alpha.$$

ここで、 n は密度、 $\mathbf{u} = (u, v)$ は速度、 ϕ は静電ポテンシャルである。添字 α, β, e はそれぞれ正イオン、負イオン、電子を表し、 $s = \alpha$ or β である。 Q は質量比 m_β/m_α であり、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である。全ての量は、摂動を受けていない時の電子密度、イオンプラズマ振動数やデバイ長などによって無次元化されている。ここで変動を表す微小量 ϵ によって展開する。

$$n_e = 1 + \epsilon n_{e1} + \epsilon^2 n_{e2} + \epsilon^3 n_{e3} + \dots, \quad n_s = n_{s0} + \epsilon n_{s1} + \epsilon^2 n_{s2} + \epsilon^3 n_{s3} + \dots,$$

$$u_s = \epsilon u_{s1} + \epsilon^2 u_{s2} + \epsilon^3 u_{s3} + \dots, \quad v_s = \epsilon^2 v_{s1} + \epsilon^3 v_{s2} + \dots,$$

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \dots.$$

また、座標は以下のような変換を行う。

$$\xi = \epsilon(x - Vt), \quad \eta = \epsilon^2 y, \quad \tau = \epsilon^3 Vt \quad \left(\text{ただし } V \text{ は } V^2 + \frac{3n_{\beta 0}}{Q^2 V^2} - \frac{3n_{\alpha 0}}{V^2} = 0 \text{ を満たす} \right).$$

弱 2 次元性の仮定が y 方向のスケーリングに入っている。なお、 V についての条件が無い場合はモデル方程式は KP 方程式となる。計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + \frac{1}{4} \left(\frac{15n_{\beta 0}}{Q^3 V^6} - \frac{15n_{\alpha 0}}{V^6} - 1 \right) \phi_1^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} = 0,$$

と MKP 方程式が導かれる。適当な変数変換をする事によって以下式 (1) の形を取り扱う。

3 解析について

今のところ、MKP 方程式の 2 次元的な解は解析的に求められていない。例えば、双線形形式による解法を考えることができるが、これについては Chen らが EKP 方程式について行った解析 [7] がほとんど同じ形で適用できる。それによると 1 ソリトン解（本質的に MKdV ソリトンである）は簡単に求められるが、2 ソリトン解を求めようとするとその 2 つのソリトンは同じ方向を向くという条件を満たす必要があるため、結局 MKdV 方程式の 2 ソリトン解が出ることになり、求めたい 2 次元的な解は得られない。

このため、ここでは数値的に調べる事を考える。具体的には、方向の異なる 2 つの MKdV ソリトンを置いた初期条件を与え、どのように波が時間発展していくかを調べる。

数値計算の方法は以前に 2dBO 方程式を調べた [4] 方法とほぼ同じである。空間微分は擬スペクトル法を用い、時間発展は、非線形の陰的部分を反復で解く Crank-Nicolson 法を用いる。

4 振幅が同符号のソリトンの相互作用について

初期条件として，2つの MKdV ソリトンを斜めに置いたものを考える (Fig.1(a),(c) を参照) .

$$u = \text{Asech} [A((X - X_0 + \Omega Y))] \quad \text{for } 0 < Y < L_Y/2,$$

$$u = \text{Asech} [A((X - X_0 - \Omega Y))] \quad \text{for } L_Y/2 < Y < L_Y.$$

ここで L_Y は Y 方向の計算領域の大きさである . パラメーター A が孤立波の振幅を², Ω が進行方向の Y 成分をそれぞれ表す . Ω が大きいほど, 進行方向の違いが大きい事になる . 時間が進むにつれて, 2つの孤立波は X について正の方向に進むので, 相互作用する場所も2つの孤立波の対称軸の所で正の方向へと進んでいく .

境界条件は X, Y 方向ともに周期境界条件とするが, Y 方向については, 孤立波が外から入ってきているとみなせるように領域の端の値をある時間単位で設定する, なお, 領域を十分長く取っているので X 方向に周期的でない解を最初に与えている影響は少ない . 時間空間のメッシュ幅は $dX = 0.1, dY = 0.1, dT = 0.005$, 領域の点数は X 方向に 4096 点, Y 方向に 1024 点を取る (実際は領域の周期性と方程式・初期条件の対称性により, Y 方向は半分の点数で計算できる) .

進む方向がかなり異なっている場合の時間発展の結果が Fig.1(b) である . 初期状態 (Fig.1(a)) と比較すると, 2つのソリトンがとほほ同じ形のソリトンが相互作用後も同じ向きに進んでいるのが分かる . 相互作用している部分はソリトンの振幅の倍の盛り上がりが出てくる . 数値計算で, 2つの孤立波の重ねあわせのパターンへと変化した後 . 定常に全体が伝わるという結果が得られたことから, この場合には個々のソリトンが独立に伝わり相互作用は少ないという事ができる .

一方, ソリトンの進む方向がかなり近い場合についての結果が Fig.1(d) である . この時には相互作用により第3の方向に振幅の大きな波 (stem) が現れている . その後方には相互作用した後の波が見られるが, 元の波とは振幅や進行方向が大きく変化している . このような stem 波の生成は, 可積分な KP 方程式で起こる「ソリトン共鳴」現象でも見られる . しかし, 相互作用している点の後である程度の大きさの波が見える事などから, ソリトン共鳴相互作用と厳密に比較する事は難しいと考えられる .

他にも様々な Ω について計算を行った, その結果, stem の振幅については Ω が非常に大きいと $2A$ (単なる重ね合わせの振幅) に近づく一方で, ある程度のところで最大値をとりそれから小さくなると徐々に A に近づくという事がわかった . この傾向はソリトン共鳴でも見られるものである .

5 振幅が異符号のソリトンの相互作用について

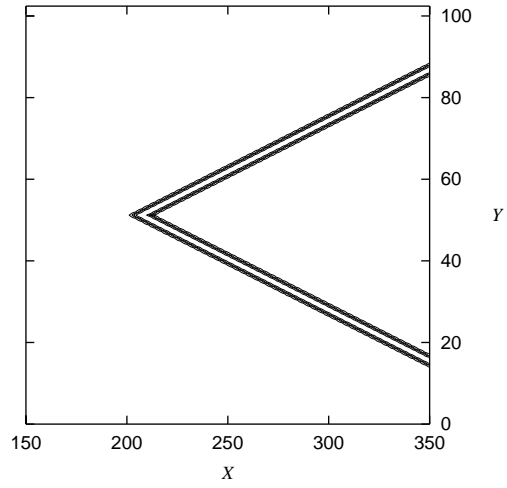
初期条件として以下のような正負のソリトンの重ね合わせを取る (Fig.2(a),(c) を参照)

$$u = A' \text{sech} [A((X - X_0 + \Omega Y))] \quad \text{for } 0 < Y < L_Y/2,$$

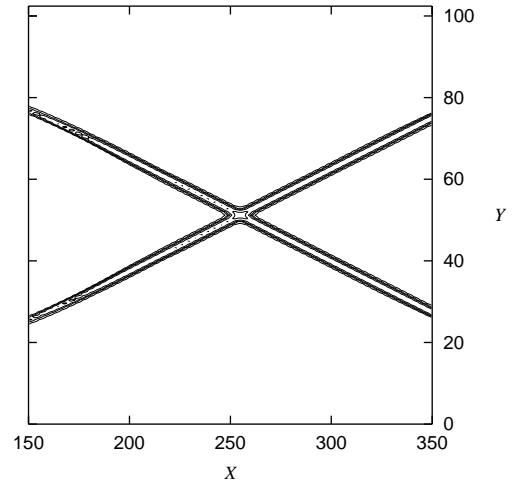
$$u = -A' \text{sech} [A((X - X_0 - \Omega Y))] \quad \text{for } -L_Y/2 < Y < 0.$$

$$A' = \begin{cases} A \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{L_y/8} \right) \right| & |y| \leq L_y/8 \\ A & |y| > L_y/8 \end{cases}$$

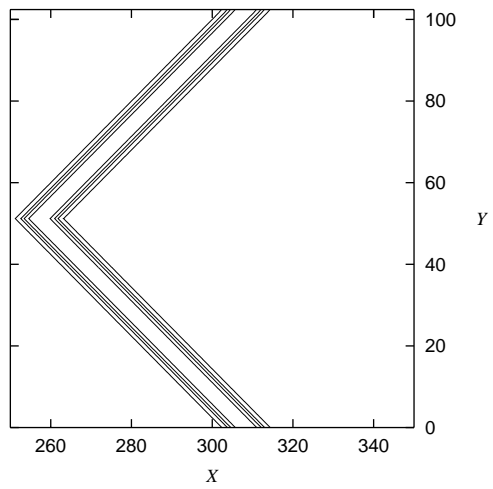
²本研究では2つの孤立波の振幅の大きさは同じ値を取らせる .



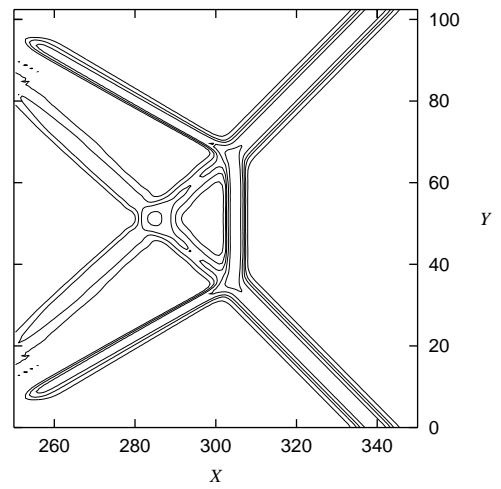
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 1: Development of the wave interaction for $A = 0.5$. (a) Initial condition for the case $\Omega = 4.0$. (b) Wave profile at $T = 2.925$ for the case $\Omega = 4.0$. (c) Initial condition for the case $\Omega = 1.0$. (d) Wave profile at $T = 25.005$.

A' を定義したのは、波形を滑らかに繋いで過渡的な変動を押さえるためである。この条件を置かない計算も行っており、結果が定性的に一致している事を確認している。

計算の結果を Fig.2 に示す。ここでも、 Ω が比較的大きい場合には、2つの正負のソリトンはほぼ形を変えず独立に伝播しており、領域中央の相互作用している場所での波形は、ほぼ重ね合わせの状態になっている (Fig.2(b) を参照)。

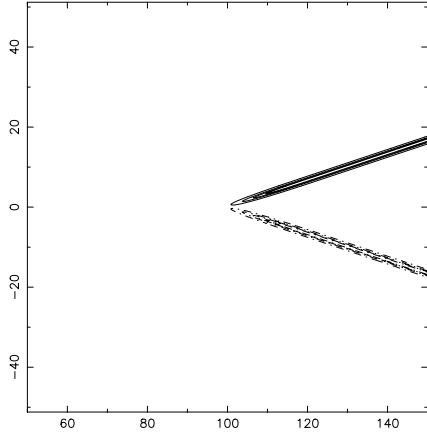
一方 Ω が小さく、孤立波の進行方向が近い場合の結果が、Fig.2(d) に示されている。まず、相互作用している領域近くでわずかな振幅の減少 (負のソリトンでは増加) が見られる。その結果、遠くの波と速度に違いが出るために波形にゆがみが見られる。さらに相互作用後を見ると、元の波は、振幅が峰の方向に変化している 1 次元で無い孤立波となって伝播している。その後方には、元の波の峰方向に延びる波列が形成されており、相互作用に近い側では正負が交互に出来ている。また、中央の相互作用している場所の後方に波の無い領域が広がっている。この領域は孤立波及びその結果として生じた波群が伝わっていくに従い、その進行方向へと広がっていく。また、これまで調べた Ω の値の範囲では、 Ω が大きくなるにつれて波の無い領域は狭くなっていき、孤立波列の存在する場所が広がっていく傾向がある。

6 まとめ

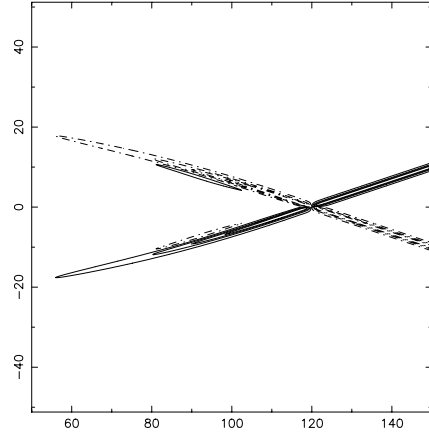
非線形孤立波の二次元相互作用について、MKdV ソリトンを例にとり、相互作用の様子やその角度依存性を数値的に調べた。これまでの方程式の結果と共通なものとして、振幅が同符号の場合の角度依存性による相互作用の質的な変化があるが、これについては解析的な研究成果がまだ得られていない。可積分な KP 方程式での理論を拡張する方向で説明が可能か、それとも別の概念を必要とするのかはこれからの研究課題である。

参考文献

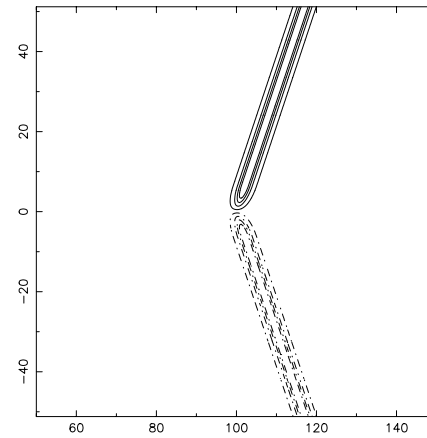
- 1) 及川正行: 九州大学応用力学研究所報 **60** (1984) 467.
- 2) Y. Matsuno: Proc. R. Soc. Lond. A **454** (1998) 835.
- 3) H. Tsuji and M. Oikawa: J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 3881.
- 4) H. Tsuji and M. Oikawa: Fluid Dyn. Res. **29** (2001) 251.
- 5) B. B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- 6) S. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 950.
- 7) Chen Yongze and P. L.-F. Liu: Wave Motion, **27** (1998) 321.



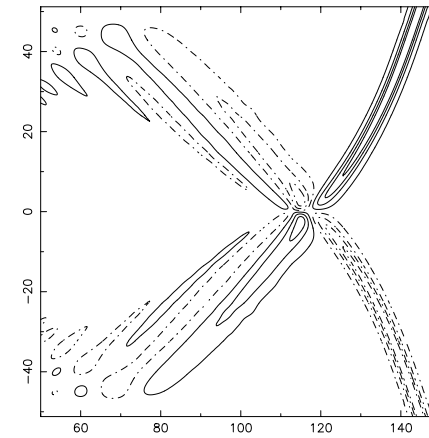
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2: The interaction of solitons with positive and negative amplitude $|A| = 1$. Note that dotted contour line means negative value. (a) Initial condition. (b) The time development for $\Omega = 3$ case. (c) The time development for $\Omega = 0.33$ case.